¿Cómo, esto *también* es matemática?

¡Todo es matemática! Máquinas tragamonedas, claves secretas, laberintos, puentes flexibles y moscas que vuelan rápido como trenes

Adrián Paenza

¿Cómo, esto *también* es matemática?

¡Todo es matemática! Máquinas tragamonedas, claves secretas, laberintos, puentes flexibles y moscas que vuelan rápido como trenes

Sudamericana

Paenza, Adrián
¿Cómo, esto *también* es matemática? - 1a. ed.
- Buenos Aires : Sudamericana, 2011.
320 p. ; 22x15 cm. – (Obras diversas)

ISBN 978-950-07-3678-7

1. Matemática. I. Título
CDD 510

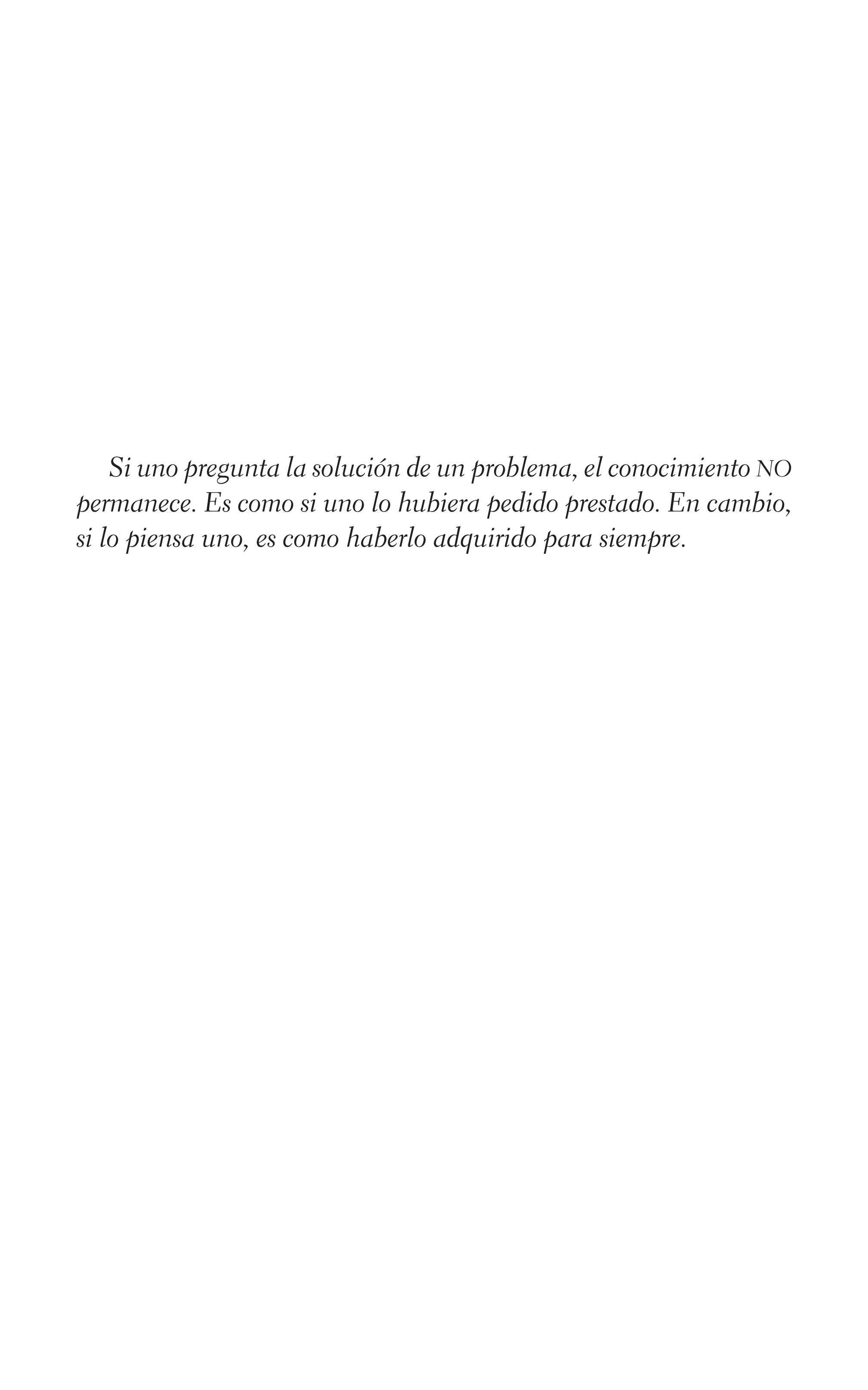
IMPRESO EN LA ARGENTINA

Queda hecho el depósito
que previene la ley 11.723.

www.megustaleer.com.ar

ISBN 978-950-07-3678-7

Esta edición de 22.000 ejemplares se terminó de imprimir en Printing Books S.A.,
Mario Bravo 835, Avellaneda, Buenos Aires, en el mes de octubre de 2011.



Si uno pregunta la solución de un problema, el conocimiento NO *permanece. Es como si uno lo hubiera pedido prestado. En cambio, si lo piensa uno, es como haberlo adquirido para siempre.*

A mis padres, Fruma y Ernesto. A ellos, mi gratitud eterna.

A mi hermana Laura y a mi cuñado Daniel.

A todos mis sobrinos: Lorena, Alejandro, Máximo, Andrea, Ignacio, Paula, Santiago, Lucio, Matías, Brenda, Miguelito, Viviana, Diego, Sabina, María Soledad, María José, Gabriel, Mía, Valentín, Lucas, Max, Amanda, Whitney, Jason, Landon, Anderson y Ellie.

A Carlos Griguol y León Najnudel, dos faros en mi vida.

A mis amigos Miguel Davidson, Leonardo Peskin, Miguel Ángel Fernández, Héctor Maguregui, Cristian Czúbara, Alberto Kornblihtt, Lawrence Kreiter, Gary Crotts, Dennis Fugh, Kevin Bryson, Claudio Martínez, Alejandro Fabbri, Víctor Marchesini, Luis Bonini, Fernando Pacini, Andrés Nocioni, Emanuel Ginóbili, Gerardo Garbulsky, Marcos Salt, Santiago Segurola, Julio Bruetman, Diego Golombek, Ariel Hassan y Woody González.

A mis amigas Ana María D'Alessio, Nilda Rozenfeld, Teresa Reinés, Beatriz de Nava, Beatriz Suárez, Nora Bernárdez, Karina Marchesini, Laura Bracalenti, Etel Novacovsky, Alicia Dickenstein, Erica Kreiter, Marisa Giménez, Norma Galletti, Carmen Sessa, Carina Maguregui, Marcela Smetanka, Mónica Muller, María Marta García Scarano, Mariana Berkenwald, Nora Bär y Marisa Pombo.

A Juan Sabia, Pablo Milrud, Pablo Coll, Pablo Mislej y Carlos D'Andrea por las numerosas ideas y sugerencias que me aportaron en este recorrido.

A la memoria de los seres queridos que perdí en el camino: Guido Peskin, mis tías Delia, Elena, Miriam, Ñata y Elenita; Noemí Cuño, Manny Kreiter, Lola Bryson, Vivian Crotts y mi primo Ricardo. Y también a la memoria de mi querido Jorge Guinzburg.

Agradecimientos

A Claudio Martínez, inspirador y compañero de todas las aventuras que hemos emprendido en televisión, diarios, charlas y libros. Imprescindible. Un amigo y profesional incomparable.

A Woody González y Ariel Hassan, porque son personas sensibles, talentosas y generosas con su tiempo, siempre dispuestas a poner sus esfuerzos y creatividad para protegerme.

A cinco personas muy especiales: Carlos D'Andrea, Juan Sabia, Gerardo Garbulsky, Alicia Dickenstein y Manu Ginóbili. Sin ellos este libro no sería así. ¿Por qué? Porque cada uno de ellos dedicó varios meses a leer los problemas, pensarlos en forma independiente, discutirlos sin pudores, proponer enunciados y soluciones alternativas, corregir mis errores… Y lo hicieron con la mejor onda y disposición. No lo escribo por una cuestión de protocolo: ¡es así! Gracias a los cinco.

A quienes me iniciaron en la matemática: Enzo Gentile, Luis Santaló, Miguel Herrera (muy especialmente) y Ángel Larotonda, pero también a aquellos con los que recorrimos partes del camino: Alicia Dickenstein, Eduardo Dubuc, Carmen Sessa, Néstor Búcari, Ricardo Noriega, Oscar Bruno, Baldomero Rubio Segovia, Leandro Caniglia, Pablo Calderón, Ricardo Durán, Fernando Cukierman, Juan Sabia y Carlos D'Andrea.

A un pequeño grupo de personas que se ocupan de estimularme en todos los emprendimientos que encaro y ponen a mi disposición los medios que dirigen, como Ernesto Tiffenberg, Tristán Bauer, Martín Bonavetti, Verónica Fiorito. Mi gratitud por la confianza que me tienen.

A Carlos Díaz y Diego Golombek, porque ellos fueron los iniciadores e impulsores de todo este trayecto. Sin ellos no hubieran existido los primeros cinco libros. Ahora empieza un nuevo camino junto a Editorial Sudamericana, pero no me olvido de los maravillosos años en Siglo XXI.

Mi gratitud también para Pablo Avelluto, porque ni bien advirtió la posibilidad de que yo estuviera libre de mis anteriores compromisos editoriales, se ocupó en hacerme saber que el grupo Random House Mondadori estaba interesado y me insistió hasta que llegamos a un acuerdo. Y por la flexibilidad y afecto con los que manejó todas las negociaciones.

A Willie Schavelzon, quien es la persona que se ocupa de todas las gestiones comerciales y que me trajo una tranquilidad que yo nunca tuve en esta materia. Su idoneidad y experiencia me permiten desligarme de todo lo que no quiero hacer porque no lo sé hacer (ni quiero aprender), y entregarle esa responsabilidad a él, que es el mejor en la industria y que me abriga, además, con su afecto.

A Glenda Vieites, la editora de este libro, que pasa por el sufrimiento de tener que leer cada detalle con extremo cuidado y por la generosidad que puso y pone para que yo nunca note las frustraciones que este trabajo le debe haber generado.

A mis compañeros de El Oso Producciones, de La Brújula, del Canal Encuentro, de Canal 7 y de Página/12. Entrar en cualquiera de los lugares en los que trabajo y sentir el afecto con el que todos me tratan no tiene precio. Es el único capital que me importa proteger.

Por último, y como siempre, mi perenne gratitud a quienes son mis guías éticos: Marcelo Bielsa, Alberto Kornblihtt, Víctor Hugo Morales y Horacio Verbitsky. Me honra decir que son mis amigos. Los quiero y los necesito.

Prólogo

Enero de 2011.

"La isla de los ojos celestes." ¿Qué? Sí, se me ocurrió que ese podría haber sido el título del libro. No, pensé. Desde que supe que se había resuelto para siempre cómo ganar a las damas, me imaginé que podía ser mejor poner "El fin de las damas". Pero no, tampoco eso me convencía.

¿Por qué tendrá que llevar un título un libro? ¿No era mejor llamarlo *Matemática... ¿estás ahí?*? "Sí, pero queremos que este sea distinto", me dijeron. ¿Distinto en qué? Son las mismas historias de toda la vida. "Sí, pero ahora el desafío es que las historias las agrupes con una suerte de hilo conductor." Y así las cosas.

Le comenté a Willie (Schavelzon): "A un autor de cuentos no se le pide que encuentre un hilo conductor de sus historias. El que escribe, escribe como le sale. Cada historia es un mundo aparte". Y mientras tanto, como supongo que nos pasa a todos, me asaltaba el temor de que ya no se me ocurriera nada más, de que ya no tuviera nada más para decir.

Pero no, la matemática ofrece una usina inagotable de pequeñas (y grandes) historias, de problemas que parecían inocentes y tardaron 400 años en resolverse; o, peor, que aún no tienen solución. Historias de gente que tuvo la creatividad suficiente

como para entrarle a los problemas desde otros ángulos. Sin embargo, hay algo que no me gusta en este relato: ¿por qué sugerir a quien está leyendo que la única manera de que a alguien se le ocurra la solución a un problema es si está particularmente dotado? ¿Por qué? ¿Por qué no decir la verdad? La verdad es que las personas que resuelven los problemas son personas que piensan como usted y como yo. Claro que no todos tenemos las mismas habilidades para los mismos temas, ni se espera que sea así. Pero sin pasarse horas y horas pensando en algo es muy difícil que a uno se le ocurra la solución de nada. Los momentos de creatividad extrema son pocos y están muy espaciados. Pero sin el esfuerzo constante y cotidiano es muy difícil que encuentren una forma de expresarse. Esa es la escenografía habitual. Las personas que produjeron los quiebres más espectaculares dentro de cada ciencia no estaban todo el día sin hacer nada y de un momento para otro se les ocurrió algo. No. No es así. Es la dedicación diaria y constante la clave. Alguna vez leí que alguien dijo: "Tuve suerte que cuando la inspiración pasó por mi casa, me encontró trabajando".[1]

Pero mientras dedico tiempo a buscar título, prólogo e hilos conductores, sigo escribiendo. Ya tenemos material no sólo para un libro, sino para más. Pero quiero compartir con usted, con el que está leyendo el libro, algunos de los apuntes y observaciones que me fui haciendo mentalmente mientras agrupaba los problemas.

Antes de avanzar quiero hacer un comentario muy importante (para mí): si usted abre el libro en cualquier página, va a en-

1. Supuestamente, el autor fue Pablo Picasso: "Cuando llegue la inspiración, que me encuentre trabajando".

contrar una historia. No sé cuál, pero una historia. Lo que puedo asegurarle es que no importa que no haya leído nada anterior. Eso no va a ser impedimento para que entienda lo que está leyendo (por supuesto, convendría que empezara a leer al menos esa historia desde el principio), pero imagine que usted está leyendo un libro de cuentos y que eligió una página cualquiera. Bastará con que vaya para atrás hasta encontrar el principio del cuento para estar tranquilo de que va a poder disfrutar de todo sin perderse nada.

Ahora sí, quiero compartir con usted la forma en la que agrupé todo. Y los "porqué". Los capítulos los llamé "Vida real", "Estrategias", "Cartas", "Azar y probabilidades", "Aritmética", "Lógica" y "Miscelánea".

Empiezo con "Vida real" y sus subcapítulos. "No sé" representa mi verdadero sentir en la vida, la dificultad que tenemos los humanos para exhibirnos vulnerables. La sola idea de aparecer haciendo el ridículo porque uno no entiende lo que cree que debería es el primer eslabón de una cadena de sufrimientos. Por eso es que creo que vale la pena empezar por allí.

"El fin de las damas" tiene un condimento extra: cualquiera de nosotros que haya jugado alguna vez a las damas entiende que ahora, después de saber que existe una estrategia para ganar siempre o, al menos, para no perder nunca, ¿qué sentido tiene jugar entonces? Hay más preguntas que surgen pero creo que vale la pena poner atención en el hecho de que el hombre inventó a lo largo de la historia juegos, pasatiempos, desafíos a vencer. No creo que quien inventara el juego de las damas haya tenido la idea de que algún día habría un grupo de personas que pensaría cómo diseñar un camino para ganar siempre. Más aún, ¿ese inventor sabría que el juego que ofrecía al mundo tenía una relación tan fuerte con la matemática?

“Tragamonedas” describe otra de las fuertes atracciones que tenemos los humanos: el juego. ¿Cómo hacer para derrotar al azar? ¿Cómo enriquecerse con un golpe de suerte? ¿Cómo ser más “inteligente” que las máquinas tragamonedas? En algún sentido, este segmento del libro invita a mirar lo que hacen los que diseñan y fabrican estas máquinas. Nosotros pensamos en “ganar dinero fácil”. Ellos, en ganarnos por cansancio y constancia. Habrá que decirlo una vez más: el casino gana siempre.

Siguiendo con el juego, “Apuestas en el casino” invita a reflexionar sobre un problema que podría plantearse en la vida real. Supongamos que uno está dispuesto a tirar una moneda diez veces y, en cada tirada, arriesga la mitad del dinero que le queda. Si yo le advirtiera que usted va a ganar seis de las diez veces, ¿le conviene jugar? Y si en lugar de tirar la moneda diez veces, la arrojáramos al aire cien veces y yo le dijera que va a ganar 55 de esas cien, usted, ¿jugaría o no? Las respuestas son —creo— sorprendentes y, como en muchos otros casos, atentan contra la intuición. Problemas como estos sirven para entrenarnos para cuando uno tenga que tomar decisiones en la vida cotidiana. Por eso pensar la solución es mucho más importante que alcanzarla.

“La matemática en Finlandia” ofrece una visión de lo que podría ser si cada país decidiera darle una mejor educación a sus ciudadanos. En todo caso, demuestra que se puede. El problema no sólo está en qué se enseña, sino también en quién lo enseña. Finlandia es un país pequeño pero sus políticas de Estado en cuanto a la inversión en educación y ciencia invitan al mundo a mirar hacia allá y preguntarles no sólo cómo hacen sino cómo hicieron.

“El tránsito y la matemática” describe lo que sucede con el

tránsito en las grandes urbes. Cada vez la situación es más caótica. ¿Qué hacer? ¿Quién diseña redes de alimentación de las zonas más pobladas al comienzo del día y de desagote cuando anochece? ¿Qué participación debería tener la matemática? ¿Por qué algunas sociedades son más respetuosas que otras? Por supuesto que no es un problema sencillo de resolver, ni mucho menos, pero de eso se trata, de juntar todas las ramas que la ciencia ofrece para mejorar la calidad de vida de los habitantes. Y como queda claro a lo largo de las distintas historias, la matemática es central en casi todas ellas.

Por supuesto, nadie puede transitar por la vida real sin tropezarse cada tanto con un "Embustero". Y de eso se trata la historia que lleva ese título. Es bueno estar preparado para no dejarse tentar por lo que parece a su favor versus lo que realmente está pasando sin que usted lo advierta. Dicho de otra manera, hay gente que se gana la vida engañando incrédulos como yo (y espero que no como usted) que nos ofrece ganar algún dinero o una apuesta fácil que pareciera que nos favorece, pero si uno pudiera leer la letra chica de lo que dice la Teoría de Probabilidades o lo que no se ve, no solamente dudaría en apostar y/o jugar, sino que directamente no lo haría.

"Regresión a la media" aborda algunos temas que están en el imaginario popular como personas que tienen o bien mucha suerte o mucha mala suerte. La matemática llega en socorro de los que realmente quieren entender los fenómenos de la vida cotidiana sin apoyarse en leer horóscopos o invocar a los astros. Por supuesto que no es un artículo exhaustivo, ni mucho menos, pero tampoco lo pretendo. Nadie va a ser un experto en el tema después de leerlo, pero sí saldrá con una idea o noción que quizás no tenía antes, y le permitirá rebatir con mayor fundamento lo que escucha o lee. Sería bueno que este tema fuera de consu-

mo habitual entre los periodistas y comunicadores de manera de poder ilustrar mejor a los lectores o a quienes miramos televisión en forma cotidiana.

El "Problema del basketball en Sausalito, con Alicia, Peter Winkler y Ginóbili" me lo contó Alicia Dickenstein en ese pequeño pueblito que está enfrente del Golden State Bridge, uno de los dos puentes más importantes del área de San Francisco. Como involucraba al basket y a la matemática, me atrapó de inmediato. El resumen es el siguiente: si un jugador ha convertido en su carrera el 77% de sus tiros libres y al finalizar la presente temporada incrementó ese porcentaje a un 83%, ¿tuvo que haber habido algún partido en el que al convertir un tiro libre lo puso exactamente en un 80%? Es decir, ¿hubo algún encuentro en el que antes de empezar llevaba menos de un 80% pero, dentro del partido, al embocar uno estuvo exactamente en un 80%? Por supuesto, mi intuición era equivocada (no importa acá cuál era porque prefiero que usted se entretenga al llegar a ese problema sin estar influido por mis conjeturas). En todo caso, quiero decir acá que es un problema precioso.

"El puente flexible" invita al asombro porque se trata de determinar hasta qué altura se elevará un puente construido con un material lo suficientemente flexible de modo que cuando se dilate por el calor no se fracture. Hasta que uno no hace las cuentas (que involucran una aplicación bien inmediata del famoso teorema de Pitágoras) no hay forma de convencerse. Vale la pena armarse de paciencia y dedicarle un rato.

"Cómo decidir educadamente" muestra la importancia de hacer una lectura adecuada de los datos. Muchas veces, enfrentados a una situación en la que hay que tomar decisiones, "las apariencias… engañan", y por eso, "las matemáticas… ayudan". Mi idea con este ejemplo es exhibir estas supuestas anomalías y

aprovechar para enriquecernos intelectualmente. Es un problema sencillo, pero muy esclarecedor.

Por último, “Un reloj y la curiosa manera de interpretar los números”, es un ejemplo simpático de cómo la utilización creativa de las operaciones más elementales de la aritmética le permitieron a alguien diseñar un reloj de pared muy atractivo. ¿Quién dijo que la matemática era aburrida? Eso sí, para poder leer la hora es necesario poder descubrir cada uno de los doce números que aparecen inscriptos en el reloj.

Ahora quiero hablar del capítulo “Estrategias”.

Pocas cosas me estimulan más que escribir sobre el diseño de estrategias. Quizás los problemas cuyas soluciones atentan contra la intuición estén en la misma categoría, pero me fascina pensar (y la/lo invito a usted a que lo haga conmigo) cómo elaborar una teoría que permita, por ejemplo, ahorrar camino, ganar tiempo, minimizar esfuerzo, maximizar el uso de algún material, contar posibilidades o mejorar la probabilidad de que algo suceda. En definitiva, invita a la creatividad, a pensar por el costado de lo esperable. Si usted me permite, me gustaría usar la expresión “pensar distinto”.

El ejemplo típico es el que se conoce como el problema de “El tren y la mosca”. En realidad, habría que decir el problema de “los” trenes y la mosca, porque hay dos trenes involucrados que avanzan sobre la misma vía pero que ignoran lo que pasará en el futuro. Los dos trenes van a chocar de frente en algún momento y hay una mosca que viaja más rápido que los dos, que va volando de un tren hasta llegar al otro, da vuelta y vuelve hacia el primero, hasta que lo toca y sale nuevamente en sentido contrario. Por supuesto, como en la mayoría de los casos, todos los problemas

tienen múltiples soluciones. Éste en particular tiene una respuesta (de las que yo conozco) que es fascinante y diferente. No cuento más: si logré despertar su curiosidad, vaya y léalo; pero más importante que todo, permítame sugerirle: vaya y disfrútelo.

Hace algunos años leí el problema "Cien personas con sombreros". Honestamente, no sé dónde fue y, por lo tanto, no puedo darle el crédito que le corresponde a quien lo escribió y/o lo planteó. O sea, el problema que aparece con ese título ciertamente no es mío. Quizás debería agregar que la mayoría de los problemas e historias que figuran en todos los libros de este tipo circulan desde hace muchísimo tiempo. La diferencia está en que ahora los buscadores como Google o Yahoo! (o el que usted prefiera) más la ayuda de la increíble capacidad de comunicación y rastrillaje que uno tiene con Internet hace que cosas que siempre aparecieron como escondidas ahora tienen un brillo particular. Pero el caso que me ocupa acá es el de las cien personas que están en una habitación con sombreros o bien blancos o bien negros, y todos pueden ver lo que tienen los 99 restantes pero no el propio; requiere de la elaboración de una estrategia particular. Sin ninguna duda, es una de las historias que yo no me perdería al avanzar en el libro.

No sé lo que le sucede a usted, pero cuando yo me enfrento con un "Rompecabezas", en principio me siento abrumado. Me parece que nunca voy a terminarlo, que no sabría por dónde empezar, y que si se trata de buscar formas de matar el tiempo, casi seguramente podría encontrar otras más generosas con mi paciencia. Y, sin embargo, muchas veces en mi vida me dejé llevar por la tentación y me puse a resolver algunos. La pregunta que la matemática puede ayudar a contestar es: si usted alguna vez tuvo que resolver un rompecabezas (y lo logró), ¿había alguna otra forma de hacerlo usando menos pasos?

Justamente, el problema consiste en ser capaz de contestar ese interrogante.

Si se trata de encontrar una estrategia que permita evitar memorizar, creo que el problema que llamé "Estrategia para descubrir un número entre cien" es uno de los más pertinentes que conozco. Hay algunas personas que tienen una habilidad particular para recordar las cartas que ya salieron al jugar al póker, o a la escoba de quince, o incluso en un casino. O que llevan un registro increíble de los números que salieron en una mesa de ruleta o al jugar a los dados. Yo no soy uno de ellos. Por eso si una persona me dijera que va a decir en voz alta los primeros cien números (del 1 al 100), pero que va a omitir uno sin decirme cuál, y que yo debo advertir cuál fue el que dejó afuera al terminar de escucharlo, si dependiera de mi memoria, no podría acertar nunca. Sin embargo, hay una forma interesante (entre múltiples otras, intuyo) que permite garantizar que uno no se equivoque. Es realmente un problema desafiante.

Otro enigma interesante es "Estrategia con monedas". Es decir, imaginemos dos personas ubicadas en dos habitaciones distintas que arrojan monedas al aire y que tratan de conjeturar lo que sucedió con la moneda que no ven. El problema reside en calcular la probabilidad de que ambos acierten con lo que sacó el otro al mismo tiempo (obviamente, cada uno ve sólo lo que sacó él). ¿Cómo hacer para maximizar la probabilidad de acertar? De entrada, cada uno puede decir al azar cara o ceca, y cruzar los dedos esperando acertar. Pero, ¿es posible diseñar una estrategia mejor que "decir cualquier cosa" y depender de la suerte?

Otro problema hiperatractivo es el de contestar si "¿Se puede o no salir de un laberinto?". Imagine un cuadriculado de 10 x 10 habitaciones. Hay algunas puertas que comunican las habitaciones entre sí de manera tal de que de cualquiera de ellas se puede

pasar a alguna de las adyacentes. Pero, dada la configuración que figura en el problema, ¿es posible pasar por las cien habitaciones sin repetir ninguna? Este tipo de problemas no sólo es entretenido para pensar, sino que además involucra a la matemática de un modo inesperado. Por supuesto, la solución que usted va a encontrar más adelante no es la única, pero la que yo propongo me parece que es sencilla y aspiro a que sea fácil de comprender.

Para terminar esta sección, incluí un problema que requiere mucha concentración. Se llama "Cinco torres inofensivas" y tiene un planteo ingenuo y sencillo. En un tablero de ajedrez ampliado de 10 x 10 en lugar del tradicional de 8 x 8, ¿es posible ubicar cinco torres de manera tal que ninguna ataque a ninguna? Si usted, como yo, no está muy familiarizado con el ajedrez, no se preocupe. No le hace falta, sólo necesita saber cómo se desplaza una torre por el tablero, cosa que está explicada en el problema propiamente dicho. Créame que el solo hecho de pensar durante un tiempo si existe una distribución de las torres de manera tal de que ninguna pueda "comer" a ninguna permite elaborar internamente estrategias que uno nunca creyó que estaría en condiciones de producir.

Entremos en el mundo de las "Cartas".

Hablar de cartas es hablar de juego, y todo lo que tenga que ver con lo lúdico siempre tiene una particular atracción para el ser humano. ¿A quién no le gusta jugar? Por supuesto, la variedad de posibilidades es enorme, y las diferentes culturas ofrecen múltiples alternativas, pero por alguna razón jugar a las cartas es (y ha sido) una suerte de constante a lo largo del tiempo.

Pero las cartas ofrecen también otro costado interesante, el de la magia. Por eso escribí "Un mago adivina las cartas", porque quiero mostrar cómo la matemática y la magia convergen hasta conformar lo que hoy se llama Matemágica. Después de elegir

mentalmente una carta entre 40 y luego de hacer algunas cuentas elementales de suma y multiplicación, uno llega a un número que será suficiente para que el mago descubra la carta original. ¿Cómo hace? ¿Cómo lo hizo? Este tipo de problemas de la matemática recreativa son los que yo creo que se deberían usar en los colegios para que los niños y jóvenes puedan aprender jugando.

Estimar, estimar… mmmmmmh, ¿estimar qué?

Aprender a estimar es otra de las falencias que los humanos enfrentamos en la vida cotidiana. Para poder tomar decisiones razonadas, es necesario saber el número de alternativas que se nos ofrecen, aun en el caso en que uno vaya a jugar a la lotería, apostar en el casino o comprar una rifa. Por eso las cartas son una usina virtualmente inagotable de ejemplos al respecto. Si yo le preguntara: "¿Cuántas combinaciones[2] de cinco cartas se pueden tener extraídas de un mazo de 52?", usted ¿qué me contestaría? O tengo esta otra pregunta (otro subtítulo): "¿Cuántas formas hay de mezclar ese mismo mazo?". No se trata de dar una respuesta exacta, pero sería bueno que uno no contestara que son mil cuando son mil millones, o que pensara que son billones cuando son en realidad alrededor de diez mil. Es decir, la idea es saber estimar, tema no menor en la vida cotidiana de una persona.

En la misma dirección, le propongo que se entretenga con la sección "Usted, ¿sabe jugar al póker? (No se preocupe, no le hace falta)". Y es verdad, no es necesario saber jugar para poder

2. Cuando uno está jugando a las cartas, recibe inicialmente un cierto número: pueden ser tres (como al truco o a la escoba de quince) o bien cinco, como en el póker. La palabra "combinaciones" sirve para indicar todas las posibles "manos" distintas que se puedan formar.

entender qué tipo de problemas se pueden plantear y sus potenciales soluciones. De hecho yo no sé jugar, pero me divirtió tratar de estimar cuántas "escaleras reales" o "tres cartas del mismo número" (llamadas "piernas") se pueden tener entre las cinco que uno recibe en cada mano. Por supuesto, a quien va a jugar a las cartas no le hace falta poder encontrar estas respuestas, uno juega y listo. Pero, en realidad, entender cuántas posibilidades existen de que una situación pueda presentarse en un juego de naipes, o en la vida real, ciertamente nos prepara mejor, sobre todo si uno va a apostar dinero o decidir algo que afecte su futuro.

Por último, una de las historias más refrescantes que experimenté en los últimos tiempos fue la que viví con Olivia, una niña preciosa nacida en China que vive en Estados Unidos, en un pueblo muy pequeño en el medio del campo. Yo estaba cenando con ella y su familia cuando Olivia sacó de un bolsillo un mazo de cartas y me planteó un problema. En realidad, más que un problema era un truco, como el que bien podría haber hecho cualquier mago. Me hizo elegir una carta mentalmente y, luego de diversos caminos que me hizo tomar, la adivinó. Pero la curiosidad de Olivia excedía el solo hecho de hacer un truco conmigo. Olivia quería saber por qué. Es decir, lo que la atrapaba no era descubrir la carta que yo había elegido, sino que lo que ella quería era hacerme el truco a mí, en tanto que matemático, para que la ayudara a descubrir por qué funcionaba. Y de eso se trataba. Lo hicimos juntos. Lo pensamos juntos. Nos equivocamos juntos hasta que advertimos entre los dos qué era lo que estaba pasando. Y ese trayecto fue un trayecto inolvidable. Puede que yo me olvide —no hablemos de la solución sino del problema mismo—, pero seguro que Olivia no. Y por eso quise terminar esta sección compartiendo con usted más que un problema de cartas o de "matemágica", una pequeña historia de vida: "Olivia y la matemágica".

Así como los problemas que involucran elaborar una estrategia tienen siempre un costado atractivo, aquellos que involucran al azar también. Es que en alguna parte, nosotros, los humanos, queremos ver si somos capaces de derrotarlo (al azar) o de predecirlo. Por eso es que agrupé algunas historias con el título "Azar y probabilidades".

La primera historia que escribí tiene que ver con dos problemas de distinto orden de dificultad ("Los dados y el azar"). El primero habla sobre la probabilidad de sacar al menos un as cuando uno tira cuatro dados sobre una mesa. Parece sencillo, y de hecho lo es. Pero sirve para prepararse y encontrar la respuesta a este otro: ¿cuántas veces hay que tirar un par de dados de manera tal de que la probabilidad de que salgan dos ases sea mayor de que no salgan? Son problemas interesantes y muy ilustrativos.

Ahora, quiero avanzar con usted un poco más. Si la/lo tuviera enfrente me gustaría preguntarle ¿qué es el azar? La idea que cada uno de nosotros tiene del azar es obviamente personal, pero en algún punto uno debería ponerse de acuerdo en la definición. Por ejemplo, el hecho de que llueva mañana o pasado o el próximo fin de semana, ¿es producto del azar? Uno tendería a decir que no… si uno pudiera analizar todos los datos atmosféricos en un período razonable, que llueva o no estará predeterminado por un grupo de variables que se pueden estudiar. En cambio, si uno tira un dado (por poner otro ejemplo), que la cara de arriba cuando el dado deje de girar sea un cuatro o un dos es un hecho que podríamos[3] adjudicarlo al azar. Una buena manera (creo) de

3. Uso la palabra "podríamos" (en potencial) porque si uno pudiera medir la fuerza con la que está tirando el dado y el giro que le da al lanzarlo teóricamente podría predecir determinísticamente la trayectoria y, por lo tanto, "podría" entrenarse para que el dado caiga de la forma que uno quiera.

poner a prueba cuán acertada es su percepción del azar es invitarlo a que lea la historia que lleva por título "¿Qué es el azar?". Allí encontrará una manera de medir lo que es su percepción personal de un evento aleatorio.

Por otro lado, usted puede usar la historia "Cuatro bolitas de colores" para poner a prueba su intuición. Es decir, encontrará un problema muy sencillo, se trata de poner en una bolsa cuatro bolitas de distintos colores: dos rojas, una negra y una blanca. Yo le voy a pedir que saque dos bolitas sin mirar y le digo que una de las que sacó es roja. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra sea roja también? Esta pregunta desafía nuestra intuición, la suya y la mía, pero este tipo de problemas son los que ayudan a tomar decisiones más razonadas cuando uno tiene que elegir. Por supuesto que es muy poco probable que en la vida uno se vea expuesto a esa situación particular. Pero de eso se trata, de poder simular la realidad lo más que uno pueda, para estar preparados cuando la vida real ofrezca la verdadera dificultad.

Otro problema parecido que sirve para atentar contra la intuición es el que aparece con el título "Medias blancas y negras". Tiene puntos en común con el anterior de las cuatro bolitas de colores, pero en este caso en un cajón hay cuatro medias de dos posibles colores: blancas y negras. A usted le dicen que la probabilidad de que al sacar dos medias cualesquiera sean ambas blancas es ½, o sea, un 50%. La pregunta ahora es, ¿de qué colores son las cuatro medias que están en el cajón? Como usted advierte, decidir el color de las medias conociendo la probabilidad de sacar dos blancas es distinto del de las bolitas, en donde de

---

Sin embargo, a los efectos prácticos de lo que uno hace en la vida cotidiana cuando juega a los dados, me tomo la licencia de decir que los resultados se pueden considerar aleatorios (o al azar).

antemano sabíamos los colores. Y justamente de eso trata la matemática, de buscar todos los posibles problemas que se puedan presentar y analizarlos tanto como sea posible.

Hablando de matemática, uno podría avanzar en otra dirección. ¿Qué pasaría si uno tuviera 16 medias (entre blancas y negras) en lugar de cuatro como en el problema anterior? ¿Y si tuviera cualquier número de medias? Es decir, los matemáticos andamos siempre a la búsqueda de los casos más generales, con menos condiciones, con más grados de libertad. Algo así como elevar la apuesta tanto como sea posible. De esa forma, si uno es capaz de resolver la situación más general, estará preparado para superar cualquier obstáculo que pudiera aparecer en esta dirección, no importa cuán difícil sea. Es por eso que escribí la "Generalización del problema de las medias blancas y negras".

En la historia que sigue, "¿Quién paga la comida?", hay una propuesta para decidir sobre un par de alternativas que involucran al azar. Lo curioso —me parece— es que lo que uno cree que pasa no es necesariamente cierto, y una vez más tambalea nuestra capacidad para intuir. Por eso es la matemática la que ofrece su estructura lógica para ayudar en las decisiones.

Aquí quiero dar lugar a un problema de la matemática más pura. Por lo tanto, tiene otro tipo de atractivos que hay que aprender a descubrir. Lo titulé "Un problema precioso sobre probabilidades", porque creo que lo es. Un anticipo: yo le voy a proponer que construyamos juntos un número muy grande, digamos de veintiocho dígitos. Usted aportará 10 y yo, los otros 18. Los diez que usted tendrá que usar son los diez dígitos conocidos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Yo le voy a dejar algunos lugares vacíos para que usted los distribuya de la forma que quiera. La pregunta va a ser, ¿cuál es la probabilidad de que el número que resulte sea divisible por 396? Como usted advierte, es muy poco probable

que este problema aparezca en la vida cotidiana; casi seguro que nunca. Pero es interesantísimo para pensar y muy útil para recorrer algunos caminos inexplorados y créame que son ciertamente muy bonitos.

Por último, la/lo invito a que lea "¿Es justa esta decisión?". Allí verá que yo le propongo que decida si es justa o no una manera de elegir entre dos alternativas. Los ingredientes son los habituales (en este tipo de libros al menos): una urna, bolitas de diversos colores y un algoritmo para elegir y determinar el que elige primero. Usted será el juez para determinar si mi oferta es razonable para las dos partes involucradas. Pensar y resolver este problema la/lo va a sorprender. Es muy común imaginar que la solución no es la que está propuesta. Por eso el desafío.

Hay un capítulo que había titulado "Aritmética", pero un sábado de febrero de 2011, mientras escribía estas líneas pensé: ese nombre, aislado, puro, rústico, no es bueno (pero igual lo dejé). No porque la artimética lo sea, sino porque advertí con el tiempo que así como la palabra "matemática" está asociada con lo aburrido, tedioso, inalcanzable, inabordable (y la lista sigue), las palabras como aritmética, geometría, trigonometría, cosmografía, cosmología, también. Entonces, me propuse advertirle a usted, a quien está leyendo estas líneas y/o estuvo leyendo el índice, que por favor me tenga confianza y no se asuste. Me gustaría ponerlo en otros términos: si yo tuviera que cambiar el título para conseguir que usted lea las historias que aparecen agrupadas allí, lo haría gustoso. Más aún, podríamos dejar este capítulo sin nombre y, en todo caso, el título lo ponemos juntos al final, después de que usted haya terminado de leer todos los problemas que allí figuran.

Acompáñeme por acá. En cualquier lugar del mundo en que usted viva, los medios de comunicación hablan de deporte, profesional o no. En los países latinos, el fútbol es fuertemente predominante. En los países sajones está todo un poco más repartido, porque mientras en el Reino Unido también el fútbol es prioritario, no sucede lo mismo ni en Estados Unidos ni en Australia, por poner dos ejemplos. Pero independientemente de cuál fuese el deporte más popular, en cada región hay algo que es inevitable: en todos se compite para ganar, y ya sea una competencia individual o colectiva, hay que hacer un programa de partidos, lo que se conoce con el nombre de fixture. Ahora bien, "¿Cómo hacer un fixture?" es una historia interesante de recorrer. Quizás usted no tenga que generar ninguno en su vida, pero en todo caso es curioso pensar cómo hacerlo aun en casos sencillos, por ejemplo un torneo para jugar a las cartas entre amigos en el que hay que establecer un orden en donde todos jueguen contra todos. No requiere usar nada sofisticado pero me resulta un problema atractivo. Espero que a usted también.

Otro tema: estoy seguro de que usted, si está en una situación de privilegio como yo, tiene una cuenta de correo electrónico, o una cuenta bancaria, o retira dinero de un cajero automático, o usa una tarjeta de crédito. Y si no, tiene algún candado o cerrojo que usa para guardar su ropa en un club o en una baulera. O tiene una clave para abrir la puerta de su auto o de una caja fuerte. En todos estos casos es necesario utilizar algún código o "password". Carlos Sarraute es un matemático amigo mío que me provee habitualmente de muchos ejemplos que le surgen a él en la vida cotidiana. En este capítulo le sugiero a usted que vea el que llamé "¿Cómo elegir una clave secreta?".

Cuando me encontré con el problema "Caramelos para todos" no sólo lo escribí para este capítulo, sino que también se

me ocurrió actuarlo con niños en una escuela y también en la Feria Internacional del Libro de Buenos Aires, en una de las presentaciones que hicimos a lo largo de los años. Invitamos a muchos chicos a subir al estrado y a verificar qué pasaría si todos estuvieran sentados formando una ronda, le diéramos a cada niño una cantidad par de caramelos y, ante una indicación suya (o de cualquier persona), digamos ante un aplauso, cada niño le entrega a quien tiene a la derecha la mitad de los caramelos que tiene en la mano. Una vez hecho el primer paso, los niños tienen ahora —quizás— un número diferente de caramelos del que tenían al empezar, que no necesariamente tiene que ser par. Entonces usted (o quien sea que inició el juego), le entrega un caramelo a todos los que tienen un número impar luego de la primera distribución. Antes de que me pregunte (no estoy allí para contestarle, pero siga leyendo): a los que se quedaron con un número par de caramelos, usted no les da nada. Ahora bien, repita el proceso que inició hace un instante, aplaude y TODO niño entrega a quien tiene a su derecha la mitad de sus caramelos. Y el proceso se repite una y otra vez. ¿Qué sucederá con el tiempo? Es un problema precioso, que no requiere de nada sofisticado sino de poder pensar y disfrutar.

El problema "Años al cuadrado" es una manera de homenajear a Ian Stewart, un matemático inglés que se transformó, en la parte final del siglo anterior y en éste, en uno de los más grandes difusores que tiene la matemática en general y la matemática recreativa en particular. Elegir un problema de su vastísima colección es obviamente injusto. Ninguno daría, solo, una idea cabal y completa de su aporte. Pero como me había propuesto elegir uno, me quedé con el que involucra la deducción de la edad de dos personas luego de leer un diálogo casi crítpico entre una de ellas y la hija del otro.

Carlos D'Andrea es uno de los matemáticos argentinos que más aportes ha hecho no sólo para la difusión de la ciencia sino también por su pasión incesante e inclaudicable en la formación de los más jóvenes. Ahora vive en Barcelona y la profundidad de sus aportes es imposible de medir hoy, cuando todavía es hablar de una tarea inconclusa, ya que sigue haciendo matemática con el mismo fervor de siempre, esté donde esté: su Corrientes natal en la Argentina, en Buenos Aires, en Berkeley, cerca de San Francisco, o en Francia, o en España. Y, además, no sólo es uno de los principales testeadores de todas las historias que aquí figuran, sino también el que aportó la idea central para varias de ellas. En particular, el que llamé "Problema de D'Andrea", porque creo que Carlos se merece tener "su" problema, un problema que lleve su nombre.

¿Cuántas veces en su vida usted se tropezó con números grandes? Deudas externas, años luz, número de células en un cuerpo, sólo por dar algunos ejemplos. Ahora bien, ¿cómo hacer para poner estos números en perspectiva? Es decir, si usted escucha que en algún lugar del mundo se produjeron fuertes lluvias y se inundaron aproximadamente 200 kilómetros cuadrados o 175.000 kilómetros cuadrados o 17.840.000 kilómetros cuadrados, ¿qué pensaría usted? En principio, nada particular, salvo el horror de saber que si las zonas estaban habitadas es muy posible que haya habido no sólo alguna víctima fatal sino también muchísima gente que se haya quedado sin vivienda, ropa, agua potable, electricidad y demás. Pero uno no tiene idea de la magnitud de lo que significan las zonas bajo las aguas, porque los números 200, 175.000 y 17.840.000 nos dicen poco a nosotros en términos de extensión porque no tenemos educada la intuición en ese sentido. Bien, si hubo una inundación de 200 kilómetros cuadrados significa que toda la Ciudad de Buenos Aires quedó

bajo las aguas. Por otro lado, 175.000 kilómetros cuadrados bajo las aguas significa que todo el Uruguay está inundado; y por último 17.840.000 kilómetros cuadrados es el área de ¡toda Sudamérica! Por eso, los números, solos, abstractos, no dicen nada. Es necesario ponerlos en perspectiva. Por eso escribí, a manera de ejemplo, "Miles de millones".

Por último, los seis ejemplos que figuran en "La belleza de la aritmética" hacen un poco de justicia sobre los múltiples patrones que aparecen en la vida cotidiana, mostrando amaneceres, pinturas, fotos de montañas o de mares embravecidos o música de Beethoven, Bach o los Beatles o Piazzolla. La belleza no está sólo reducida a maravillas de la plástica, de la música, de la literatura o del arte. La matemática tiene también sus formas y patrones particulares. Por eso, la/lo invito a que se interne en las atracciones que también la matemática tiene para ofrecer.

No puede faltar un capítulo de "Lógica", y, por eso, no falta. Eso sí, contiene algunos problemas preciosos que me tuvieron a mí (y a todos los que me sufren día tras día) entretenido pensándolos, que me frustraron cuando no me salieron y me dejaron eufórico al advertir por dónde podía encontrar una solución.

La historia de "La isla de los ojos celestes" fue un hito para mí. Si bien hay múltiples versiones de la misma historia, elegí contar la que me parece accesible, entretenida y seductora. Imaginemos un grupo de personas que vive en una isla y sólo tienen ojos azules y marrones; en la isla no se puede hablar del color de ojos. Cada uno puede ver el color de ojos del resto pero no el propio. Si por alguna razón alguno de los isleños descubriera que

tiene ojos azules tendría que abandonar la isla al día siguiente. Funciona todo bien hasta el día en el que llega un visitante, que frente a todos los pobladores de la isla dice algo que cambia la vida de los isleños para siempre. ¿Qué dijo? ¿Qué pasó después?

La variedad y cantidad de maneras de informarnos que tenemos es increíble. Las formas de comunicarnos, la velocidad de la transmisión de datos, la codificación y decodificación de mensajes es alucinante. Pero, también, junto con esta catarata o aluvión que recibimos a diario, aparecen errores u horrores de lógica. Para poner algunos casos en relieve es que escribí una breve historia sobre "Las algas usan medias rojas". Como usted advierte, hay que quitar o vaciar de contenido a la frase que acaba de leer: las algas no usan ningún tipo de ropa, mucho menos medias, y si usaran medias no serían rojas (acépteme la digresión... gracias). Pero problemas de lógica como éste infectan nuestra vida cotidiana y es bueno —creo— que lo revise y se ponga a prueba a usted mismo. ¿Tendrá usted las defensas altas como para poder detectar los errores de lógica?

Quiero ahora proponerle algo con respecto a los dados. En general, los dados con los que uno juega, por ejemplo, a la generala, o en el casino, o a cualquier otro juego de mesa conocido, tienen no sólo seis caras, sino que las caras opuestas exhiben números que suman siete. Es decir, en la cara de abajo del número cuatro, tiene que estar el tres. Los números 1 y 6 están enfrentados también, así como el 2 y el 5. Con estas reglas, me/le pregunto: "¿Cuántas formas hay de construir un dado con un cubo cuyas seis caras están pintadas de seis colores distintos?". El planteo completo y la solución están en ese capítulo.

Y, para cerrar, una historia que leí en un libro del matemático Peter Winkler. Yo lo titulé "¿Quién mira a quién?", pero el nombre es irrelevante, lo interesante es poder pensarlo. Winkler tie-

ne la particularidad de ser un extraordinario generador de ideas dentro de la matemática recreativa. Todas las que le conozco tienen algún condimento que las hace distintas. El planteo que él hace tiene que ver con soldados en un campo de batalla. Como a mí no me atrapa nada que tenga que ver con la guerra, preferí elegir un grupo impar de estudiantes en un recreo, en donde todos los alumnos, en un momento determinado, son invitados a elegir una posición y también elegir uno de sus compañeros a quien van a mirar. Sí, a mirar. Cada uno puede optar por el compañera/o que quiera, pero tiene que fijar la vista en uno. ¿Es posible demostrar que tiene que haber alguno de los jóvenes que no es mirado por nadie?

De eso se trata, de jugar también. La matemática es un juego y problemas de este tipo son los que ayudan para entrenarse con situaciones ficticias, pero que estimulan al desarrollo de nuestra capacidad para pensar. No es poco.

Y, como final-final, dejé las historias que no quise o no pude ubicar en los capítulos anteriores y por eso les puse de título "Miscelánea". Si uno mirara alrededor, en cualquier actividad de la vida en la que esté involucrado, si uno prestara atención, descubriría que estamos rodeados. Sí, rodeados. Pero no crea que me volví paranoico. No, estamos rodeados de números. Por eso mismo "Números, estamos rodeados" es la forma que elegí para convencerla/o de que no hay manera de vivir hoy sin estar atado a algo que tenga que ver con los distintos sistemas de numeración, desde la hora, el peso, la altura, las calorías, el sueldo, el horario del tren, la nota, las fechas. Elija lo que quiera. Los números sirven para envolver todo lo que hacemos y forman parte de la vida cotidiana en tantas formas que hoy sería imposible, IM-

POSIBLE, vivir sin ellos. Y ni hablar de la universalidad. Mientras que nos comunicamos con múltiples idiomas, según la región del mundo que habitemos, los números cruzan todas las barreras lingüísticas y se instalan como pares o iguales tanto en español, inglés, francés, alemán, italiano, portugués… y la/lo dejo a usted seguir. ¿No es extraordinario que eso suceda?

Cuando yo era un niño que aún iba a la escuela, había dos cosas que me tenían intrigado (como seguramente le debe de haber pasado a usted también si hace un mínimo esfuerzo de memoria): la primera, tenía que ver con los números que nunca terminaban, es decir, los números como *pi* o incluso los racionales como 2/3 o 1/7. Pero la segunda tenía que ver con los infinitos. ¿Qué quería decir *infinito*? ¿Era un número más grande que todos? Es decir, la noción de infinito que yo tenía era que cualquier número con el que yo lo quisiera comparar, resultaba que *infinito* era mayor. Por ejemplo, si uno quisiera medir la longitud de una recta que se extiende ilimitadamente hacia la derecha y la izquierda, debería concluir que la recta tiene longitud infinita. Si yo comparo la longitud de la recta, con la longitud de CUALQUIER segmento, la recta "gana" siempre. Claro, una recta no entra en una hoja de papel; no importa cuán grande sea el papel, la recta se escapa. Entonces, tengo la tentación de preguntarle, "¿Se puede construir una curva de longitud tan grande como uno quiera pero que quepa en una hoja de papel?" De eso trata la historia que usted va a encontrar más adelante en el libro.

Y siguiendo con la misma idea, uno podría plantearse: el *infinito*, ¿podría ser un número? O, más aún, el infinito, ¿será un número? Justamente, si uno lo considerara como un número debería cumplir las mismas reglas que todos los números, se vería sometido a las mismas leyes que todos los demás, ¿o no? Por eso escribí "Si el infinito fuera un número" y "Cuidado con el infinito".

Uno de los temas más espectaculares de la matemática tiene que ver con la suma de números. Sí, aunque no parezca porque uno siempre cree que sumar involucra solamente sumar finitos números. Pero, ¿qué pasa cuando uno suma *infinitos* números? Esto requiere de una definición un poco más cuidadosa y el resultado no siempre es un número. Es decir, si uno suma

$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 + \ldots + 1/2^n + \ldots$ obtiene el número 2

(Lo que amerita una nota al pie.[4])

Pero si uno suma $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + \ldots$ descubre algo muy interesante (e impredecible después de haber visto lo que pasaba con el ejemplo anterior de la suma de la serie geométrica): a medida que uno va sumando más términos, el resultado se hace arbitrariamente grande. Es decir, esa suma ¡diverge! Esta serie se llama *serie armónica*, y a ella me quiero referir en la historia que llamé "Más sobre la serie armónica (o El regreso de la serie armónica)".

Aunque no lo parezca, éste ha sido nada más que el prólogo del libro. Una invitación a recorrer un camino —que no tiene por qué ser ordenado— que fue como una suerte de gira guiada, en donde pretendí contarle qué habrá de encontrar en cada esta-

---

4. Es lo que se llama la *suma de la serie geométrica de razón* 1/2, cuya suma resulta el número 2. En general, se sabe que la *serie geométrica* cuya razón es un número real q que es *mayor* que (-1) y *menor* que (+1) es *convergente*, mientras que diverge en cualquier otro caso cuando el número q es positivo y mayor que (+1) y no tiene límite ni finito ni infinito cuando el número q es menor que (-1).

ción o lugar en donde se detuviera. Obviamente, usted siéntase libre de avanzar por donde esté más cómoda/o. No hace falta que siga ninguna ruta particular, no es necesario que usted lea y/o resuelva un problema para poder penetrar en otro. No hay tiempos ni presiones. A partir de acá se supone que uno empieza una aventura, una aventura que no tiene testigos ni jueces. En todo caso, mi objetivo es que usted disfrute tanto al leerlo como yo disfruté al escribirlo. Y la pregunta final que yo le haría es la siguiente: después de haber leído y pensado alguna de las historias, ¿no se siente mejor? ¿No siente que le sirvió para aprender algo que no sabía? ¿Habrá valido la pena?

VIDA REAL

No sé

Es curiosa la dificultad que tenemos los humanos para decir "no sé, no entiendo".

Y es curioso también cómo se va modificando a lo largo de los años, porque los niños no tienen dificultades en preguntar "¿por qué el cielo es azul?" o "¿por qué mi hermanito tiene 'pitito' y yo no?" o "¿por qué gritaban ustedes dos ayer por la noche?" o "¿por qué el agua moja y el fuego quema y la electricidad 'da patadas'?". Y siguen los porqué.

En todo caso, a lo que aspiro es que concuerde conmigo en que los niños no tienen dificultades ni conflictos en cuestionar todo. Y cuando digo "todo", quiero decir "¡todo!".

Pero a medida que el tiempo pasa empiezan los rubores, los temores y uno ya no se siente tan cómodo cuando se exhibe falible o ignorante. La cultura se va filtrando por todas partes y las reglas empiezan a encorsetar.

Uno se empieza a sentir incómodo cuando no entiende algo. Y la sociedad se ocupa de remarcarlo todo el tiempo:

"¿Cómo?, ¿no entendés?"
"¿No sabías que era así?"
"¿Dónde estabas metido, en una burbuja?"

"¡Es medio tonto, no entiende nada!"

O los más agraviantes aún:

"El ascensor no le llega hasta el último piso."
"No es el cuchillo más afilado del cajón."
"Le faltan algunos jugadores."

Los ejemplos abundan. En el colegio uno solamente hace las preguntas que se supone que puede hacer. Pero si uno tiene preguntas que no se corresponden ni con el tema, ni con la hora, ni con la materia ni son las esperables por el docente, entonces son derivadas o pospuestas para otros momentos.

Es decir, ir a la escuela es imprescindible —obvio— pero claramente la escuela dejó de ser la única fuente de información (y la más consistente), como lo fue en un pasado no muy lejano. Y por eso creo que en algún momento habrá que re-pensarla. No dudo del valor INMENSO que tiene, pero requiere de adaptaciones rápidas a las nuevas realidades. Y no me refiero solamente a modificar los programas de estudio, sino a revisar las técnicas de educación que seguimos usando.

Durante muchos años, salvo a través de los padres, no había otra referencia más importante y fuente de conocimiento que ir al colegio. Sin embargo, las condiciones han cambiado mucho. Ahora, los medios electrónicos no están solamente reducidos a la radio y la televisión. Y no es que hoy los colegios sean prescindibles —todavía— , pero me refiero a la unicidad y posición de privilegio que tuvieron durante más de medio siglo.

Hoy ya no. Internet, correos electrónicos, mensajes de texto, Skype, Twitter, Facebook, teléfonos inteligentes, Blackberries, IPhones, IPods, IPads y demás han reemplazado y ocupado esos

lugares de preponderancia, o por lo menos están en franca competencia.

Perdón la digresión, pero no pude evitarla. Sigo: todavía la sociedad, en forma implícita o explícita, condena el decir "no sé". Siempre sostuve que la matemática que se enseña infunde miedo entre los jóvenes, especialmente en los colegios, aunque también sucede en las casas de esos mismos jóvenes por el problema que tuvieron/tienen los propios padres de esos chicos.

Pero el otro día, en una entrevista, me propusieron que pensara si lo mismo no pasa con Lengua o Historia. Y creo que no, que no es lo mismo. Me explico: ningún niño siente que es inferior si no entiende algo de Historia o de Lengua. Lo siente, sí, cuando se trata de Matemática. Allí no hay alternativa. Si uno entiende, es un "bocho" y tiene patente de inteligente, "nerd" o algo equivalente. Es más, a ese niño le están permitidas ciertas licencias que los otros no tienen. Y eso porque le va bien en matemática. Y son pocos. Digo, son pocos los niños a los cuales les va bien, con todo lo que eso conlleva como carga por parte de los adultos.

"Le va bien." ¿Suena raro, no? ¿Qué querrá decir que "le va bien"? Ese niño, quizás, puede preguntar. Nadie lo va a considerar mal si cuestiona lo que pasa alrededor "porque le va bien en Matemática". No es lo mismo que le vaya bien en Lengua o en Historia o en Geografía. Eso no, porque eso se aprende, se estudia, es cuestión de dedicarle tiempo. Con la matemática parece que eso no pasa. Es decir, la percepción generalizada que la sociedad tiene (al menos de acuerdo con mi experiencia) es que hay gente dotada y otra que no. Los dotados no necesitan mucho esfuerzo, entienden y listo. Y los otros, la gran mayoría, no importa cuánto tiempo le dediquen, o cuanto esfuerzo estén dispuestos a ofrecer, no hay caso. Algo así como que "lo que natura non da, Salamanca non presta", con toda la brutalidad que esta frase implica.

Aquí, un breve paréntesis. El arte presenta también otro ángulo interesante. Si un niño tiene algunas condiciones que lo destacan en la pintura o en la música, por poner algunos ejemplos, entonces sí, ese niño está bien. Se lo acepta como "raro" (o "rara") y puede hacer preguntas. Pero la media, la mayoría de los chicos, no. No está bien visto. Si uno pregunta, es porque no entiende o no sabe, y no queda bien exponerse como ignorante de algo. Parece como que generara vergüenza, propia y ajena.

¿Por qué? ¿Por qué se supone que uno no puede preguntar? ¿Por qué se supone que uno tiene que entender aunque uno no entienda? ¿Por qué está mal volver a preguntar algo que se supone que uno sabía pero que se olvidó? ¿Por qué? ¿Por qué no aceptar que vivimos constantemente sumergidos en una duda? ¿Por qué no valorar la duda como motor del aprendizaje, del conocimiento?

En todo caso, pareciera que sólo aquellos que tienen la seguridad de que nada les va a pasar son los que pueden cuestionar sin sentirse minimizados o disminuidos ante los ojos del interlocutor.

Y aquí es donde conviene detenerse. Si se trata de conseguir seguridad, uno podría decir "¿seguridad de qué?". Seguridad de que nadie lo va a considerar a uno un idiota, o un tonto. O están también aquellos a quienes no les importa tanto el qué dirán. Pero son los menos.

La sociedad parece sólo valorar "el gran conocimiento", la cultura enciclopedista. Algo así como la cultura de ser un gran diccionario o una enciclopedia que camina. Una sociedad que discute a la creatividad, a aquel que se sale del molde, a aquel que pregunta todo el tiempo, aquel que dice "no sé", "no entiendo".

Yo creo que uno debería tratar de estimular la prueba y el error. O, mejor dicho, de estimular que el joven pruebe y pruebe,

que pregunte y pregunte, y que busque él/ella la vuelta para ver si le sale o si entiende lo que en apariencia le resulta inaccesible. Sobre todo invito a los adultos a que nos asociemos a la búsqueda con ellos, a mostrarnos tan falibles como ellos, sobre todo porque SOMOS tan falibles como ellos, y no estaría mal mostrarnos tan apasionados por entender como ellos, tan curiosos como ellos.

En definitiva, el saber es algo inasible, difícil de definir. Y perecedero, salvo que uno lo riegue todos los días. ¿Qué quiere decir saber algo? Una persona puede saber cuáles son todos los pasos para conducir un auto, pero eso no significa que sepa manejar. Un cirujano, no bien egresa de la facultad de medicina, puede creer que sabe lo que tiene que hacer. De allí a poder operar, hay un trecho largo.

Por eso, el único camino es la pregunta, la duda y el reconocimiento constante del "no sé, no sé cómo se hace; no entiendo; explicámelo de nuevo".

Y eso es lo que creo que nos falta como sociedad: seguir como cuando éramos niños, sin pruritos ni pudores. Era el momento en el que no saber era visto como una virtud, aceptado por los adultos por la ingenuidad que contenía y porque la película estaba virgen y estaba todo por entender. Quizás uno llegue a la conclusión de que en esencia conoce poco y de muy poquitas cosas, pero la maravilla de la vida pasa por el desafío de descubrir. Y de poder decir "no sé, no entiendo".

El fin de las damas

Desde que aparecieron las computadoras personales, la vida de los humanos cambió drásticamente. Cambió en múltiples sentidos, pero muchos de esos cambios quizás permanezcan intangibles o sean imperceptibles para la mayoría, y obviamente me incluyo en ese grupo. Me quiero referir a un caso muy puntual, el de los juegos.

Estoy seguro de que usted sabe jugar al ta-te-tí. No sólo eso, sabe también que no importa si el que empieza a jugar es usted o su rival, si cada uno juega con la estrategia correcta el partido termina inexorablemente empatado.

Es decir, si empieza usted, hay una estrategia ganadora, pero eso sucede siempre y cuando su rival juegue en forma equivocada. Si juega como corresponde, el resultado es tablas.[5]

Por supuesto, jugar al ta-te-tí entonces se transforma en algo

5. El que empieza el juego ubica una X en el casillero del centro. Si el que juega segundo pone una O en cualquiera de los cuatro lugares del centro (como se ve en la Figura 1) entonces pierde la partida independientemente de como siga jugando. Basta seguir los pasos que aparecen en la Figura 2. En cambio, si juega en cualquiera de los cuatro de las puntas (ver Figura 3), entonces la partida es empate. Siempre. Es decir, *siempre y cuando cada uno haga el mejor movimiento en cada caso*.

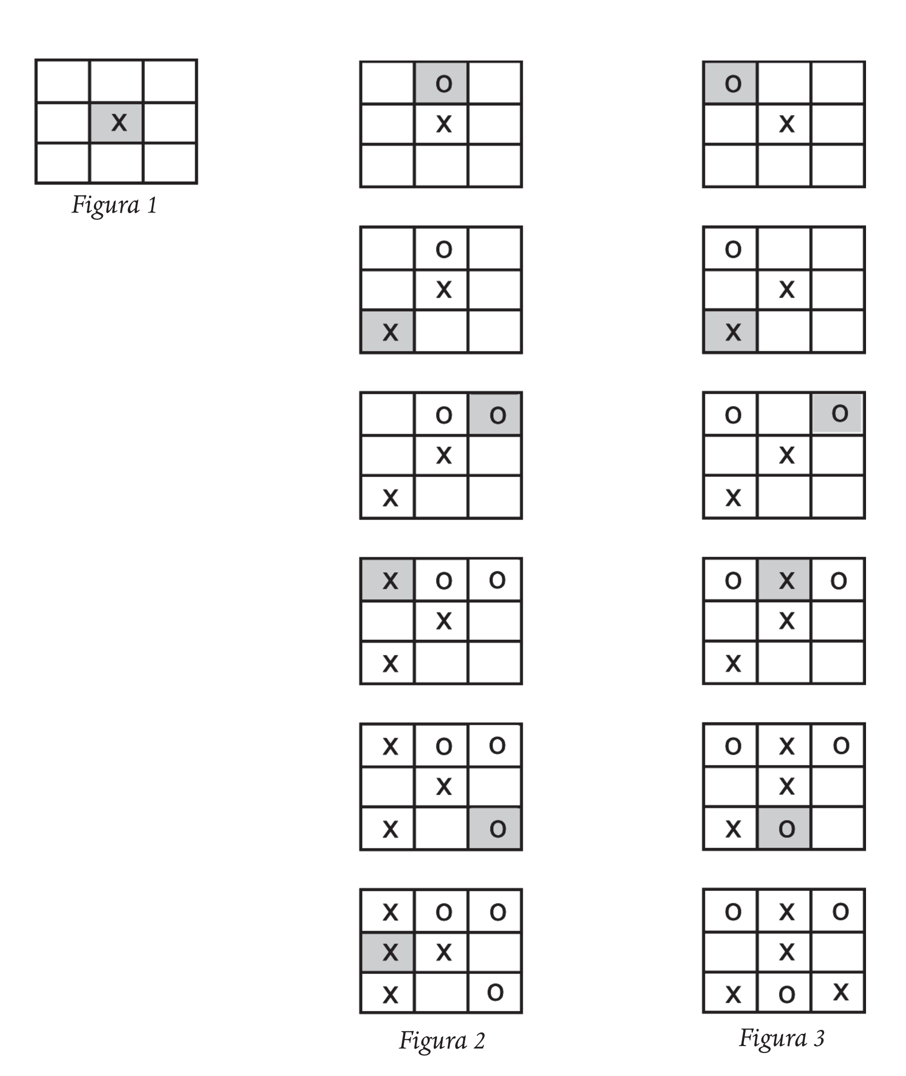


Figura 1

Figura 2

Figura 3

aburrido para un adulto, no tiene ningún incentivo. En todo caso, jugar al ta-te-tí clásico sólo sirve para entretener a un niño hasta que él descubra la estrategia para no perder.

De estos juegos hay muchísimos. Y también hay muchísimos resueltos. ¿Qué quiere decir "resueltos"? Lo mismo que con el

ta-te-tí. Es decir, que si ambos jugadores siguen una estrategia preestablecida y ninguno de los dos se equivoca, el juego termina empatado.

También hay juegos en donde el orden importa. Es decir, el que arranca primero, gana (si juega bien, claro está). O, al revés, el que juega segundo es el que gana. Pero más allá de hablar en general, me quiero referir a un juego muy popular, muy conocido y sobre todo, muy expandido: las damas. ¿Quién no ha jugado alguna vez a las damas? En todo caso, el juego consiste en un tablero de 8 x 8 (como el de ajedrez), en donde se alternan las casillas blancas y negras, y cada participante tiene 12 fichas. No voy a escribir acá el reglamento, que es muy fácil de conseguir. Pero lo que sí me importa es marcar que hace muchos siglos que el ser humano juega a las damas. Muchos. El atractivo, en todo caso, reside en que uno juega elaborando estrategias en el momento pero sin saber —al menos hasta hace poco no se sabía— si hay siempre una estrategia ganadora, o por lo menos una estrategia que inexorablemente termine en un empate.

El énfasis lo quiero poner en "hasta hace poco", ya que hasta el año 2007 no se conocía si había una forma de no perder nunca. Pero desde el 19 de julio de ese año se sabe. No sólo se sabe sino que la comunicación oficial al mundo de que había llegado "El final de las damas" fue publicada en la prestigiosa revista *Science*.[6] Allí, el autor principal, el matemático canadiense Jonathan Schaeffer, profesor en Ciencias de la Computación en la Universidad de Alberta en Edmonton (Canadá), demostró que por más que uno intente, si su rival juega correctamente todas las

---

6. Jonathan Schaeffer, Neil Burch, Yngvi Bjornsson, Akihiro Kishimoto, Martin Muller, Robert Lake, Paul Lu y Steve Sutphen, Revista *Science*, Vol. 317, no. 5844, pp. 1518-1522, 19 de julio de 2007.

veces que le toque mover sus fichas, usted ya nunca más podrá ganar. ¿Qué raro que suena, no? ¿Significará esto que uno no podrá nunca más ganar una partida de damas? En fin, ése es otro capítulo. Sigo con lo mío.

A pesar de que la mayoría de las personas… en realidad, debería corregirme y poner: la abrumadora mayoría de las personas… nunca prestará atención a lo que escribió Schaeffer, me permito hacer la siguiente observación: es posible que cuando dos personas jueguen a las damas en la vida cotidiana ninguno de los rivales sepa qué tiene que hacer en todos los casos para no perder. Pero, si usted (como mucha otra gente) tiene planeado jugar contra una computadora, le sugiero que piense bien lo que va a hacer, salvo que no le interese saber que no puede ganar.

Claro, con los programas actuales, hay formas de elegir el nivel con el que uno juega y de esa forma una podrá sortear lo inexorable. Ahora, si usted quiere ir al estamento más difícil, entonces sepa que no va a poder ganar.

A Schaeffer le llevó casi 19 años resolver el problema. Piense que todas las posibles posiciones que pueden quedar en el tablero son más de 500 trillones: un número cinco, seguido de 20 ceros

500.000.000.000.000.000.000

En septiembre de ese año, el 2007, Schaeffer y sus colegas terminaron de escribir el programa que juega a las damas y al que no se le puede ganar. Le pusieron un nombre: se llama Chinook.

Schaeffer empezó su periplo en 1989. Diariamente usó en paralelo más de 50 computadoras, aunque en los momentos pico llegó a necesitar 200.

La parte sustancial del trabajo de Schaeffer consistió en simular finales de cada partida, es decir, cuando ya quedan a lo sumo 10 (diez) piezas en el tablero. De todas formas, no crea que eso transforma el problema en algo mucho más manejable: las posibles posiciones con diez piezas o menos son ¡más de 39 billones! Es decir, el número 39 seguido por 12 ceros, algo más que ¡cinco mil veces la cantidad de gente que vive en el planeta!

Lo que es interesante y verdaderamente paradójico es que para empezar a jugar a las damas sólo hay 19 posibles maneras de hacer las tres primeras jugadas.[7]

Schaeffer confesó ser un pésimo jugador de damas pero su objetivo al diseñar un programa como Chinook fue exhibir la potencia del uso de la inteligencia artificial aun para cosas mundanas y que parecían inabordables. Con la ayuda de computadoras cada vez más rápidas y más potentes pudo avanzar en un camino que cada vez tiene más adeptos dentro de las distintas ramas de las diferentes ciencias. Si un humano sospecha que algo es lo mejor que puede hacer, ¿cómo transformar esa sospecha en certeza?

Schaeffer lo logró con Chinook y por eso el programa elige siempre la mejor jugada,[8] y para el rival la única alternativa es también elegir siempre la mejor[9] para llegar a lo sumo a un empate.

Por supuesto, para poder saber qué era lo que pensaban los expertos en el juego, Schaeffer estuvo en contacto con los mejores jugadores de damas del mundo. De ellos aprendió cuáles

7. En verdad, hay aproximadamente 300 variantes posibles de hacer tres movidas, pero más de 100 son duplicadas y el resto se puede probar que son equivalentes. De ahí el número 19 que figura en el texto.

8. O una de las mejores, si es que hay varias.

9. Otra vez, igual que en el ítem anterior, una de las mejores, si es que hay varias entre las que hay que optar.

eran las mejores (y también las peores) movidas que se podían hacer en determinadas situaciones y de esa forma construyó una imponente base de datos. Después hacía correr el programa y junto a su equipo monitoreaba los errores y producía los cambios necesarios. Esa tarea fue la que insumió tantos años. Chinook fue virtualmente aprendiendo a decidir lo que tenía que hacer ante cada situación.

Schaeffer comentó que su objetivo inicial era que Chinook ganara el campeonato mundial de damas (en donde competimos nosotros, los humanos). En 1992 obtuvo esa posibilidad al llegar a la final, pero perdió frente a Marion Tinsley. Tinsley es considerado el mejor jugador de damas de todos los tiempos. Murió en 1995 pero en 41 años (desde 1950 a 1991) sólo perdió tres partidas. Schaeffer intentó nuevamente con Chinook en 1994 y ahí sí ganó y se convirtió en el primer programa de computación de la historia que ganó un campeonato mundial, tal como figura en la Guía Guinness de Records Mundiales.[10]

Haber resuelto un problema como el del juego de damas exhibe el avance que ha producido la rama de la ciencia que se conoce con el nombre de Inteligencia Artificial. El desarrollo de programas como el de Schaeffer muestra cómo el ser humano es capaz de simular su propia capacidad para acumular datos, aprender a ordenarlos, razonar ante una dificultad y obrar en consecuencia. No es poco, teniendo en cuenta que los problemas que enfrenta la computadora nos llevarían a nosotros, los humanos, tiempos que se miden en cientos de miles de años.

---

10. En realidad, Tinsley no jugó al tope de sus posibilidades y se retiró debido a una enfermedad. Moriría ocho meses más tarde. De todas formas, en 1996 Chinook fue mucho más potente aún y con los procesadores más rápidos la brecha con los humanos se amplió para siempre.

Pero siempre quedarán preguntas abiertas. De hecho, Schaeffer y su equipo, en representación de los humanos pudieron con las damas. Ahora el ser humano va por el ajedrez, tarea ciclópea si las hay.[11]

Pero el mundo moderno requiere de las nuevas tecnologías. El avance es exponencial. Por supuesto, uno podría volver hacia atrás en el tiempo y reacomodarse como si nada hubiera pasado. Pero, dependiendo del gusto de cada uno, ¿podríamos reinstalarnos en la Edad de Piedra y empezar todo de nuevo? Lo dudo. ¿O usted no es una persona que cuando se olvida el teléfono celular en su casa, vuelve para buscarlo porque se siente desnudo hasta que no lo recupera?

---

11. Las damas ofrecen un número de posiciones equivalente a la raíz cuadrada de las que tiene el ajedrez, que se estima en el rango entre 10^{40} y 10^{50} (un 1 seguido de 40 hasta 50 ceros). Como escribió Schaeffer en su artículo en *Science*, teniendo en cuenta las dificultades que tuvieron que atravesar para resolver el problema de las damas, el ajedrez no será resuelto por un largo tiempo, salvo que se produzca un quiebre en el conocimiento que se tiene hasta ahora.

Tragamonedas

Las máquinas tragamonedas, de las que hay repartidas en todo el mundo y son bien conocidas por nosotros, produjeron en el año 2009, sólo en Estados Unidos, 25 mil millones de dólares. Y esos 25 mil millones están estimados como ganancia. Es decir, esta suma es posterior a haber pagado a quienes ganaron al jugar y descontados los impuestos (obviamente altísimos) que aporta el juego. Sin embargo, aun en esas condiciones, el número es escalofriante. Y representa la mitad de lo que producen anualmente todos los casinos de Las Vegas.

Para tener una idea de lo que significa este número, piense en lo que generó la industria del cine (nada menos) en el mismo período: juntando todas las salas estadounidenses y todas las películas que se exhibieron, el total recaudado fue de 10 mil millones de dólares. Es decir, las máquinas tragamonedas produjeron dos veces y media más que Hollywood, con todo el poderío y potencia de sus estudios y luminarias.

Aun así, por más interesante que resulte esta comparación, hay algo que para mí tiene aún más atractivo: ¿quiénes fabrican estas máquinas?, ¿cómo las hacen?, ¿cómo interviene la matemática en todo esto?

Por supuesto, los casinos tienen mucho cuidado en no per-

der de vista que la probabilidad de ganar esté siempre a favor de ellos. Por lo tanto, sea quien fuere quien las diseñe y construya, debe poder garantizar el resultado: “El casino tiene que ganar SIEMPRE”.[12]

Pero las máquinas fueron cambiando. Antes había ruedas y tambores que giraban, dientes que se engarzaban, ejes que había que lubricar. Hoy es todo digital. Y eso trajo una diferencia sustancial en la percepción: en la medida que había algo mecánico involucrado, uno tenía la sensación de que el azar todavía tenía alguna incidencia.

Es decir, al hacer girar una ruleta, uno ve cómo gira la bolita en sentido contrario, y la ve saltando de un número a otro hasta depositarse en alguno de ellos. Es como si hubieran entregado una cierta tranquilidad de conciencia: si uno pierde, perdió por mala suerte. Y si gana, también ganó por la suerte. Pero no hay nada escondido, salvo que el tambor de la ruleta esté “tocado”. Es decir, ganar o perder tiene que ver —en apariencia— con el azar.

Ahora, imagine una ruleta digital, en donde se van encendiendo distintas luces a medida que la bolilla imaginaria va girando alrededor de una ruleta virtual. ¿Cómo sabe uno que no hay un programa diseñado ad hoc de manera tal de que pueda detectar cuáles son los números que tienen menos dinero apostado y hacer detener esa bolilla en uno de esos casilleros? Tal como usted supone, ese programa es posible de diseñar e intuyo que para los programadores no debe de ser muy difícil (sí lo es para mí).

---

12. Una breve digresión. Cuando digo que el casino tiene que ganar siempre, quiero decir que es muy difícil encontrar un equilibrio entre el deseo del jugador por jugar, la cantidad de veces que apuesta y la cantidad de veces que pierde. La gente que opera los casinos conoce nuestras debilidades (las de los humanos) y por eso la banca termina siempre con una ventaja a su favor.

Cuando la ruleta y la bolita son tangibles, uno cree que controla. En el mundo digital, esa sensación de control se pierde. Y, aunque uno está dispuesto a someterse a la suerte, ya no se siente tan cómodo si imagina a alguien que puede mover los hilos sin que uno lo advierta.

El 70% de las máquinas tragamonedas que se usan en Estados Unidos y el 60% de las que se usan en el resto del mundo se producen en un solo lugar: International Game Technology (IGT). Es una fábrica que está situada en Reno, Nevada, el estado que también cobija a la ciudad más famosa del mundo en este rubro, Las Vegas.

El diseñador de estas máquinas y miembro del directorio de IGT es el matemático Anthony Baerlocher. Egresado de la Universidad de Notre Dame, Baerlocher tiene un objetivo claro: "El programa tiene que ser tan bueno que permita que los casinos ganen dinero SIEMPRE, pero de tal forma que los clientes ganen las suficientes veces también de manera tal de que sigan jugando o vuelvan al día siguiente". No es una tarea fácil.

Los casinos funcionan "creyendo en la ley de los grandes números".[13] Baerlocher[14] explica: "En lugar de tener una máquina, los casinos quieren miles, porque saben que cuanto más grande sea el volumen jugado, aunque alguna de las máquinas

---

13. En la Teoría de Probabilidades, el teorema que se conoce como "La ley de los grandes números" es el que establece que si uno repite un evento un número grande de veces (por ejemplo, tirar una moneda millones de veces) los resultados a obtenerse son los esperables (mitad cara y mitad ceca en el caso de las monedas). Es uno de los resultados más importantes de la teoría.

14. Parte de los datos de este capítulo así como las declaraciones de Baerlocher están extractados del último libro de Alex Bellos *Here's Looking at Euclid,* de reciente publicación. Para todos aquellos interesados en temas de matemática recreativa es una referencia ineludible.

pierda mucho, el total (de máquinas) tiene una probabilidad muy grande de ganar. IGT produce aparatos diseñados de forma tal que la ganancia está garantizada con un error del 0,5% después de ¡10 (diez) millones de jugadas! Por ejemplo, en el casino de Peppermill (también ubicado en Reno), cada máquina produce 2.000 jugadas por día. Como ellos tienen cerca de 2.000 tragamonedas, eso significa que llegan a 4 millones de jugadas por día, y, por lo tanto, en dos días y medio llegan a las 10 millones que necesitan para tener la garantía de que tendrán su ganancia con un error del 0,5%. Si la apuesta promedio es de un dólar y el porcentaje de ganancia está estipulado en un 5%, diez millones de jugadas significan 500.000 dólares para el casino, con un error potencial de 50.000 dólares cada 60 horas. Estos números explican el negocio y por qué los casinos tienden a tener cada vez más de estas máquinas".

El desafío para Baerlocher es "tocar" las probabilidades de manera tal de favorecer a los casinos, pero sin descorazonar a los jugadores. Hasta acá, juzgando por el desarrollo que ha tenido IGT, parece que lo ha logrado.

Moraleja: Supongo que no escribí nada nuevo, nada que no se supiera de antemano, pero internamente creo que todos tenemos la fantasía de que podremos —algún día— hacer saltar la banca o diseñar una estrategia que permita ganarle al casino. Lamento informar acá que eso es muy muy poco probable que suceda. Casi me atrevería a decir que la probabilidad es ¡cero![15]

15. Sin embargo, la gente sigue jugando. Como me dice Carlos D'Andrea, esto tiene que ver con nuestra condición de humanos: tenemos que creer en alguna parte que poseemos un toque especial que nos permite derrotar al azar.

Apuestas en el casino

El joven entra en el casino. Lleva $ 1.000 para jugar. Un amigo le dice que tiene una propuesta para hacerle. En lugar de apostar a la ruleta, a punto y banca o al black jack, le ofrece el siguiente acuerdo: tirar una moneda 100 veces. Cada vez que lo hace tiene que arriesgar la mitad del dinero que tiene. Si acierta, gana la cantidad que apostó. Si pierde, lo mismo. O sea, pierde el dinero que apostó (que era la mitad del dinero que tenía).

Por ejemplo, al empezar a jugar tiene que apostar $ 500 porque es la mitad del dinero que tiene. Si gana, tiene ahora $ 1.500. En cambio, si pierde, se queda con $ 500.

Si gana primero y pierde después, pasa a tener $ 750. ¿Por qué? Es que si acierta en la primera tirada, como apostó $ 500 (de los $ 1.000 que traía) pasa a tener $ 1.500. Pero como pierde en la segunda tirada, y tuvo que haber apostado $ 750 (que es la mitad de los $ 1.500 que tenía), pasa a tener

$$1.500 - 750 = 750$$

¿Y si pierde en la primera tirada y gana en la segunda? ¿Hay alguna diferencia? Veamos. Si pierde en la primera, como apostó $ 500 y tenía $ 1.000, se queda con $ 500. Sabemos que gana

con la siguiente apuesta, pero como arriesga sólo la mitad de lo que tiene, eso significa que ganó \$ 250.

En total, tiene ahora, como en el caso anterior, \$ 750.

Uno tiene derecho a sospechar, entonces (aunque deberá comprobarlo), que es indiferente que gane primero y pierda después, o que pierda primero y gane después. ¿Será así? ¿No le dan ganas de pensarlo a usted?

Sigo yo. Quiero proponerle lo siguiente, que sitúa el problema en otro lugar. Cada vez que gana, agrega al dinero que tenía, una mitad más.

Esto es equivalente a decir que si tenía (digamos) X pesos, ahora pasa a tener

$$X + (1/2)\,X$$

O sea,

$$X + (1/2)\,X = (3/2)\,X$$

Es posible pensar, entonces, que cada vez que gana, multiplica la cantidad que tenía por el número (3/2).

De la misma forma, cada vez que pierde pasa a tener

$$X - (1/2)\,X = (1/2)\,X$$

O sea, si pierde, es como si multiplicara el dinero que tenía por (1/2).

Por lo tanto, ganar primero y perder después significa multiplicar primero por (3/2) y luego por (1/2). Si su suerte es exacta-

mente al revés, y pierde primero y gana después, es como multiplicar primero por (1/2) y luego, al resultado, multiplicarlo por (3/2). Obviamente, obtiene lo mismo.

¿Qué se deduce de todo esto? Que si tirara la moneda muchas veces, para saber cuánto dinero va a tener al final, todo lo que tiene que hacer es multiplicar el dinero que trajo por (3/2) tantas veces como acertó, y multiplicar por (1/2) tantas veces como perdió.

Por ejemplo, si tiraron la moneda 5 veces y ganó 4 y perdió 1, entonces, lo que tiene que hacer es:

$$(3/2) \times (3/2) \times (3/2) \times (3/2) \times (1/2) = 81/32$$

y este número (81/32) es aproximadamente igual a 2,53.

Por lo tanto, si tiene la suerte de ganar cuatro veces de las cinco que tiraron la moneda, se iría ganador con más de dos veces y media el capital que traía (más de $ 2.530 para quien arrancó con $ 1.000).

Ahora, tengo algunas preguntas para hacer. Acá van:

1) Si el amigo le dice que van a tirar la moneda 10 veces y que el que trajo el dinero va a ganar 7 de las 10 veces, ¿le conviene aceptar?
2) ¿Y si de las 10 va a ganar 6, acepta o no acepta?
3) Más aún, si tiran la moneda 100 veces y el que lleva el dinero va a ganar 55 y pierde 45, ¿acepta o no acepta?
4) En todo caso, ¿cuántas de las 100 veces puede tolerar perder sin comprometer su patrimonio? Es decir, ¿cuántas veces se puede dar el lujo de perder (de las 100) sin salir perdiendo dinero cuando terminen de arrojar la moneda?

(Las respuestas, en la página 94)

La matemática en Finlandia

Todos los años, inexorablemente, hay un momento en el que los medios de comunicación entran en una suerte de estado de pánico con respecto a la matemática. Por supuesto, dura un par de días, nada más, y suele coincidir con el momento en que se conocen los resultados de las estimaciones anuales que se hacen sobre el nivel de la matemática en el país.

Ignoro la razón, pero en la Argentina el lugar de donde suelen provenir estos datos está situado en La Plata. No sé bien por qué, pero históricamente pareciera que los problemas se concentraran allí.

Los diarios nacionales "levantan" la noticia, los programas de noticias de la mayoría de las radios azotan durante todo el día con los resultados, los noticieros de televisión amplifican todo un poco más, un montón de supuestos expertos somos consultados sobre "dígame qué pasa", o "por qué pasa", cada uno de nosotros da una opinión que cree diferente y que puede colaborar, y ¡hasta el año que viene!

Algunos se rasgan las vestiduras un poco más, ministros de educación de diferentes provincias tienen reuniones con sus asistentes más cercanos, vuelan las fotocopias de los diarios reproduciendo los números del desastre, las convocatorias urgentes para entender el tema con los gabinetes psicopedagógicos, los

asistentes más encumbrados, la matemática moderna, la antigua, las computadoras en el aula, etcétera, etcétera.

Y ni qué hablar cuando el país compite con estudiantes de otros países: pareciera que los argentinos no supiéramos leer, ni escribir ni hacer cuentas elementales. Aparecemos abrumados por lo bien que les va a todos los otros países y acurrucados en un rincón ante la comparación que siempre nos resulta adversa, aun con naciones menores, pequeñas, que parecieran enrostrarnos nuestras incapacidades.

¿Y entonces? Como esto sucede inexorablemente todos los años, quiero reproducir algunos datos que me resultaron interesantes. Quizás a usted también. Sígame por acá.

Hay un programa internacional llamado PISA[16] que evalúa las capacidades de alumnos de 30 países.[17] Se inició en el año 2000 y se hace cada tres años. Primero correspondió a lectura, en el 2003 a matemática, y en el 2006 a ciencia en general. En el 2009 se repitió la experiencia con lectura, y así continuará con el de matemática en el 2012. El análisis de los resultados lleva aproximadamente un año y medio y son consideradas las estadísticas más importantes y respetadas del mundo. En promedio, se evaluaron 275.000 alumnos de entre 15 y 16 años.

---

16. PISA es la sigla de un programa internacional: Programme for International Student Assessment (Programa Internacional para la Evaluación del Estudiante, o algo así). Este programa lo lleva adelante la Organización para la Cooperación Económica y Desarrollo (OECD, Organization for Economic Cooperation).

17. En el 2003, los países participantes en matemática fueron: Alemania, Australia, Austria, Bélgica, Canadá, Corea del Sur, Dinamarca, Eslovaquia, España, Estados Unidos, Finlandia, Francia, Grecia, Holanda, Hungría, Irlanda, Islandia, Italia, Japón, Luxemburgo, México, Noruega, Nueva Zelanda, Polonia, Portugal, República Checa, Suecia, Suiza y Turquía.

Dicho esto, quiero comentar algunos de los resultados y luego la/lo invito a algunas reflexiones.

- Hay seis países que están constantemente entre los 10 primeros: Finlandia, Canadá, Japón, Holanda, Australia y Nueva Zelanda.[18]
- De los países que participaron en la evaluación sobre matemática en el año 2003, Estados Unidos apareció en el lugar 23. En el 2006 ocupó el lugar 21 en ciencia y 28 en lectura y resolución de problemas en el 2009.
- Y solamente el 1% de de esos alumnos estadounidenses entre los jóvenes de 15 años demostró que podía competir al más alto nivel, y fue superado por 27 países en todos los otros niveles en que fueron evaluados.

Destaco los resultados obtenidos por los alumnos estadounidenses por dos razones: es el país más grande en número de habitantes de los que participa y porque en Argentina tenemos la tendencia de compararnos constantemente con todo lo que se hace allá.

Ahora, el caso que más me importa compartir con usted. Finlandia es un pequeño país en Europa (su superficie es de apenas el doble en tamaño que Uruguay). Viven allí alrededor de 5.400.000 personas (versus 3.700.000 uruguayos).

Sin embargo, no importa cuál sea el método utilizado para

18. Singapur, que también tiene un programa de matemática de alto vuelo en todo el país, no participó. El orden de los países en el año 2003 fue: Finlandia, Corea del Sur, Holanda, Japón, Canadá, Bélgica, Suiza, Australia, Nueva Zelanda, República Checa, Islandia, Dinamarca, Francia, Suecia, Austria, Alemania, Irlanda, Eslovaquia, Noruega, Luxemburgo, Polonia, Hungría, España, Estados Unidos, Italia, Portugal, Grecia, Turquía, México.

medir el nivel de sus estudiantes, junto con Singapur ocupan sistemáticamente los dos primeros lugares. Naturalmente, los otros países (a quienes les interesa la educación) quieren saber por qué. ¿Qué hacen los finlandeses de diferente? Acá, algunas respuestas.

- Ser maestro en Finlandia no es un trabajo, es una profesión.
- De acuerdo con la última encuesta nacional, no es una profesión cualquiera, sino que está entre las tres más respetadas y es la primera a la que aspira cualquier joven.
- Para alcanzar esa posición dentro del país el recorrido de un aspirante es equivalente al de terminar una carrera universitaria para nosotros.
- De la misma forma que un médico necesita(ría) de una actualización constante, lo mismo sucede con los maestros allí: se los entrena y monitorea su evolución. Sus propios pares evalúan si está en condiciones de continuar en la profesión, tal como sucede en los concursos de renovación de profesores universitarios en la UBA.
- Saber enseñar es una cualidad imprescindible. Y hay que demostrarlo.

Y dejé para el final lo que imagino que usted está pensando: los maestros tienen una de las profesiones mejor remuneradas en el país, equivalente a la de un ingeniero o un médico.

Varios países del mundo han convocado a quienes lideran los programas tanto en Finlandia como en Singapur. Algo hacen distinto. Personalmente, no creo en las evaluaciones o competencias entre alumnos para decidir nada. Pero no puedo ignorar el dato. Existe. Y no es del aquí y ahora, sino que viene sucediendo desde hace más de una década. Lo que sí me importa subra-

yar es que tanto en Finlandia como en Singapur la educación importa. Importa a nivel estatal, gubernamental y está instalada en la sociedad.

Y si se trata de discutir los temas para enseñar, la idea es reducir la cantidad pero mejorar la calidad. Cambiemos la mentalidad; históricamente tratamos de cubrir un kilómetro de ancho pero con un centímetro de espesor. La propuesta es revertir esas dimensiones. En lugar de pensar en programas que cubran 50 tópicos, es preferible seleccionar adecuadamente 15 y discutirlos en profundidad a lo largo del año. Y, por supuesto, convocar a la comunidad matemática esparcida por el país para que dé su opinión, pero que también tenga voto.

En todo caso, si hay algo en lo que me gustaría parecerme a Finlandia (o Singapur) es en eso, en haber detectado que la forma de trascender como país y defender la independencia es a través de la educación pública, gratuita, laica y obligatoria. Pero también de calidad. Y para lograrlo hace falta la voluntad política de hacer el cambio. Para eso hace falta INVERTIR en educación, incrementar mucho todos los presupuestos y elaborar un plan para los próximos cinco años, en principio, con miras a revertir lo que sucede hoy en la próxima década.

Pero la mejor forma de ejemplificar lo que le representó (y representa) a Finlandia la decisión que tomó respecto de la educación en general, y la matemática en particular, es la siguiente. Intuyo que usted escuchó hablar de la firma Nokia. Le refresco un dato: es —entre otras cosas— la mayor productora de teléfonos celulares en el mundo. Nokia es finlandesa. Tiene 123.000 empleados distribuidos en 120 naciones y vende sus productos en 150. En el año 2009 declaró una ganancia de 1.600 millones de dólares. ¿Se imagina si Argentina pudiera proveerle al mundo algún producto que requiriera del añadido de nuestro conoci-

miento y no solamente cuero, soja, minerales y carne? Es decir, un país que tiene la octava parte de habitantes que nosotros es capaz de crear con su valor agregado un producto que instala en el globo y se transforma en líder en el mercado. De eso se trata también. Eso —su educación— le permite a un país instalarse en el mundo, penetrar en los distintos mercados, hacerse competitivo, generar fuentes de trabajo calificado, abrir fábricas y tener una sociedad educada.

Es hora de dejar de pensar siempre que el problema es la matemática o que son los alumnos. Ninguno de los dos, la matemática que se enseña atrasa y es aburrida. No es la verdadera matemática que es plástica y creativa. Y tampoco son los alumnos los responsables de lo que nosotros hacemos con ellos. Los maestros hacen y han hecho lo que pueden y pudieron. Pero lo que otros advirtieron es que la única forma de progresar es —y lo escribo de nuevo— a través de la inversión en educación. No hay otra.

Quizás en ese momento, y espero que no sea en un futuro muy lejano, las noticias que llegan de La Plata ya no sean tan catastróficas. Eso sí, los medios tendrán que buscar con qué reemplazarlas. No creo que tengan problemas: siempre habrá alguien bailando por un sueño.

El tránsito y la matemática

Cualquiera que viva en una gran ciudad de la Argentina va a entender esto: el tránsito está transformándose cada vez más en una gran aventura.

Cruzar las calles obliga a un constante gesto de audacia.

Manejar, también.

Ahora bien, ¿por qué sucede que en algunos países el tránsito es más ordenado y en otros es más caótico?

Yo sé que la respuesta que surge inmediatamente es la de la educación. Y es natural que así sea. Ser peatón en Suiza no es lo mismo que en Córdoba o en Buenos Aires. Y manejar en Munich involucra muchísimos menos riesgos que en Rosario o en Tucumán. Pero también es cierto que el respeto que existe por el otro en cada una de las ciudades europeas es diferente del que existe en nuestro país.

Me quiero ocupar específicamente del tránsito vehicular. Y lo quiero hacer desde dos perspectivas diferentes: desde la del conductor del vehículo y desde la del planificador, o sea, desde aquel que quiere organizar y poner las reglas para que manejar no se transforme en un acto que orilla entre el homicidio y el suicidio.

La matemática puede servir para mejorar las condiciones de

vida de la sociedad, mientras nos educamos y aprendemos a ser más solidarios y respetuosos con el otro. La idea es entonces "modelar" el problema y tratarlo con las herramientas adecuadas. Pongámonos de acuerdo en lo siguiente. El tránsito de vehículos sería ideal, si le permitiese al conductor llegar a destino:

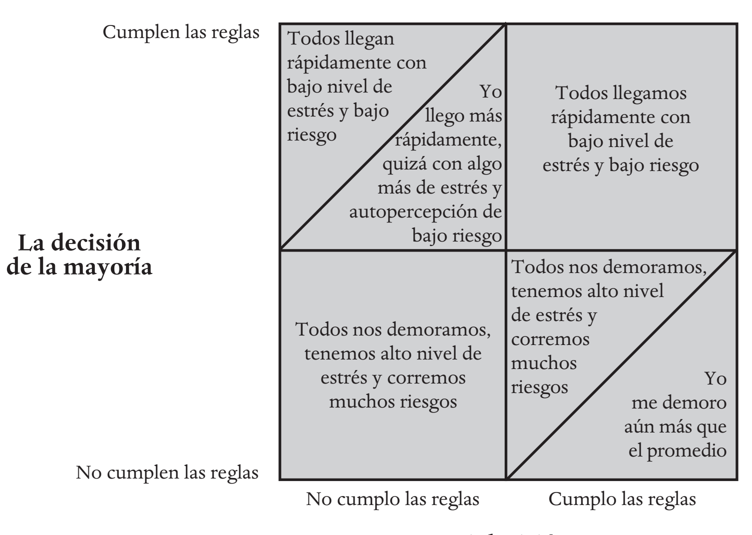
- En el menor tiempo posible.
- Con el menor riesgo posible.
- Minimizando el costo (teniendo en cuenta combustible, peaje, infracciones y demás).
- Sin estresarse.

Obviamente, entre el tránsito ideal y el real hay grandes diferencias. El que conduce no está solo; maneja con otros a su alrededor. Por lo tanto, si cada uno de ellos intenta optimizar los cuatro puntos, eso va a terminar afectando las condiciones de los otros. Es decir, algunos de los puntos se ponen en tensión.

Por ejemplo, uno puede llegar a su destino más rápidamente (optimizando el primer punto), pero para hacerlo tiene que ir por una autopista en lugar de por calles internas y eso empeora el punto 3. O, en cambio, puede optar por ir por un camino más largo pero más seguro, por lo que está privilegiando los puntos 2 y 4, pero empeora los puntos 1 y 3, porque tarda más y consume más combustible (ver la Figura de pág. 70).

Pero, además de elegir el camino, el conductor toma un gran número de decisiones en muy poco tiempo. Por ejemplo, cuando el semáforo se pone en amarillo, ¿frena o acelera?, ¿esquiva el pozo o lo pasa por arriba?, ¿pone la señal de giro para pasar de carril o no?, ¿respeta el carril? Si alguien pone la luz de guiño para doblar delante de él, ¿desacelera para dejarlo pasar o acelera para que no le gane?, ¿mira para adelante o por el espejo

retrovisor o al tablero o a la persona que viene en el asiento del acompañante?



Como se ve, hay muchísimas variables que pasan inadvertidas porque terminan siendo decisiones casi inconscientes, se toman automáticamente. La matemática permite predecir cómo se va a comportar el tránsito. Sí, aunque suene antiintuitivo es posible construir un "modelo" que replique la realidad en forma tan aproximada que uno pueda sacar conclusiones sobre lo que va a pasar antes de que suceda.

Uno, en tanto que conductor, cree que hace lo que quiere. Hasta cierto punto, eso es cierto. Pero el tránsito y el flujo vehicular toman decisiones por uno sin que sean advertidas por el que maneja.

En general, la rama de la matemática conocida con el nombre de "Teoría de Juegos" sirve para entender un poco más el

problema. En realidad, como casi todos los países tienen reglas de tránsito bastante desarrolladas, el grado de cumplimiento de esas reglas es lo que varía y lo que genera diversos conflictos que podrían ser superados si la cultura fuera diferente. Incluso dentro de un propio país, habitantes de distintas ciudades respetan las reglas en forma diversa.

Por ejemplo, en una cultura en la que hay un alto nivel de acatamiento, en general el promedio de los conductores llega más rápidamente a destino, lo hace con menos estrés y con mucho menos riesgo de accidentes. Estas situaciones se llaman de colaboración.

Por supuesto, lo inverso sucede en culturas con bajo grado de acatamiento, es decir, en situaciones de no colaboración.

La pregunta que cada conductor se hace —consciente o inconscientemente— es "¿cuál va a ser mi grado de acatamiento de las reglas de tránsito?". De las respuestas que se obtengan, y de la matemática, dependerá la elaboración de un plan de tránsito.

Lo invito a pensar, entonces, en dos situaciones posibles. En la Argentina, donde el nivel de acatamiento a las reglas de tránsito es en general muy bajo, como conductor uno tiene dos opciones:

- Usted puede hacer como todos los demás, o sea, no cumplir las reglas y, por lo tanto, demorar en llegar a destino, hacerlo estresado y con alto riesgo de accidentes.
- O bien, usted puede cumplir con las reglas, pero el grado de estrés puede incluso aumentar (por el fastidio que le genera ver lo que hacen todos los demás) y, además, posiblemente también termine demorando más en llegar a su destino.

Ante esta disyuntiva, la mayoría de la gente se contagia de la cultura local y deja de cumplir la mayoría de las reglas.

¿Qué sucede en otras culturas? Suponga ahora que usted está en Suecia o en Alemania, en donde hay un alto nivel de acatamiento a las reglas de tránsito. Uno también tiene dos opciones (como conductor).

- Se alinea con lo que ve y cumple con las reglas, en cuyo caso tiene el mismo beneficio que los otros que están al volante.
- O bien decide no cumplir con algunas reglas para aprovecharse de esa cultura y así llegar más rápidamente que todos los demás, quizás con un poco más de estrés, y seguramente con una percepción de que no incrementó mucho más su riesgo.

En principio, parecería que la segunda opción, en la que uno se aprovecha del sistema, es la mejor, ya que uno tiene todos los beneficios como si hubiera respetado las leyes y, encima, llega antes.

Pero el problema reside en que si todos llegan a la misma conclusión que usted y deciden no cumplir con las reglas, entonces uno ha logrado cambiar la cultura y termina en el peor de los escenarios. Aunque no lo parezca, alcanza con que entre el 5 y el 20 por ciento deje de cumplir las leyes para que la cultura cambie drásticamente de una situación de colaboración a una de no colaboración.

Y una vez que se rompe la cultura de la colaboración es muy difícil restituirla, ya que los que cumplen se ven perjudicados por cumplir y no tienen el incentivo para seguir respetando las reglas por miedo a que los demás se aprovechen de ellos. Entonces, todo sigue igual: mal.

Con modelos muy similares al que acabo de describir para

el tránsito, se pueden entender dinámicas de colaboración y no colaboración en el pago de impuestos, en la corrupción, en el trabajo en equipo en empresas y en muchos otros ámbitos sociales.

Por otro lado, la matemática es también esencial para poder diseñar y planificar el tránsito en una ciudad o en un país. Por ejemplo, piense usted si tuviera que tomar alguna de estas decisiones:

- ¿Será conveniente construir una autopista?
- ¿Y dónde poner el peaje?
- ¿Convendrá expandir una línea de subte?
- ¿O incluso no sería mejor cambiar el recorrido de un colectivo?
- ¿Dónde convendría agregar semáforos?
- ¿Y en dónde permitiríamos estacionar y en dónde no?
- ¿Convendría construir un nuevo puente?
- ¿O modificar la velocidad máxima en una autopista?

Todas estas decisiones deberían estar basadas en poder predecir qué reacciones producirán una vez implementadas (más allá de las cuestiones económicas que involucran). La aspiración es que cada cambio sea un cambio positivo, pero ¿cómo garantizarlo? La matemática permite modelar estos cambios, fijarse qué tipo de reacciones se producen y evaluar si vale la pena hacerlos o no. Por supuesto, además de mejorar la experiencia del transporte, se necesita evaluar otras variables, como el nivel de ruido, la contaminación que se agrega, el costo de inversión para una obra o incluso una modificación reglamentaria.

Y es allí donde una vez más se hace imprescindible el uso de herramientas de simulación y optimización y, por supuesto, la

resolución de ecuaciones que describen el problema. Y todo esto es hacer matemática. Una vez más.

Nota: El doctor Gerardo Garbulsky fue quien inspiró y pensó esta parte del libro. Sin él, yo no lo hubiera podido escribir. Su trabajo se vio reflejado también en la serie “Alterados por Pi”, que se emitió por el canal Encuentro, en la que Gerardo participó como coautor.

Embustero

¿Se acuerda de la época del cuento del tío? Cuando a uno querían venderle un buzón, el Obelisco o un billete premiado de lotería.[19] Para todos aquellos que tengan menos de 30 años, sugiero consultar con "el equipo". Ahora que lo pienso me resulta tan gracioso como tierno. ¿Se podría aplicar hoy? En fin…

Sin embargo, lo que todavía seguimos viendo es gente que vende espejitos de colores. Embusteros. Eso. No se me ocurre una palabra mejor: embusteros, timadores, pillos, canallas, cuenteros. Elija usted la que le parezca más apropiada, pero la definición debe decir que es "una persona que quiere aprovecharse de la buena fe de su(s) interlocutor(es)".

Con todo, si bien hay situaciones tan obvias que impiden que uno se compre el Obelisco, hay otras que no son tan evidentes. Y conviene estar alerta. Estoy seguro de que la mayoría de quienes están leyendo este texto pasaron alguna vez por una calle en donde había un señor, con tres mitades de cáscaras de nueces, y debajo de una de ellas una bolita o una moneda, y las iba mo-

19. Para todos aquellos a los cuales la expresión "el cuento del tío" no les resulte familiar, les sugiero que le pregunten a cualquier persona que tenga más de 50 años.

viendo alternativamente y preguntando "¿Debajo de cuál de las tres se encuentra?". Y recibe apuestas. Y gana. Gana muchas más veces que las que pierde. Y muchas de las que pierde, lo hace a propósito, para seducir a más clientes.

Es por eso que hoy quiero contar una de las múltiples historias que circulan. Muchas tienen el mismo origen, y por lo tanto la misma forma de destruirles el encanto. Pero de todas formas conviene estar atento y preparado para que alguien bien entrenado no trate de usar la matemática en su beneficio y en perjuicio de otros.

Un señor pone tres cartas en un sombrero. Cada carta está pintada de un solo color por lado. Para ser más precisos,

- una carta tiene los dos lados pintado de blanco,
- otra carta tiene un lado pintado de blanco y otro de negro,
- y la tercera carta tiene negro de los dos lados.

Una vez puestas las cartas en el sombrero, le ofrece a quien quiera participar, que elija una de las tres cartas y que la ponga arriba de la mesa. Supongamos que la carta que sacó tiene el color Blanco expuesto hacia arriba, es decir, no se ve el color que hay del otro lado.

El dueño del sombrero entonces, le dice al que retiró la carta: "Usted sabe que la carta que eligió tiene o bien Negro o bien Blanco del otro lado".

Es que no puede ser la carta que tenga los dos lados Negro, porque usted ya ve que la parte que está expuesta es de color Blanco.

Por lo tanto, es o bien la carta B/B o bien la B/N. Luego, la probabilidad de que del otro lado haya o bien N o bien B es la misma.

"Le apuesto entonces 100 pesos a que del otro lado la carta es de color Blanco."

La tentación entonces es creer que lo que dijo este hombre es cierto. O sea, que las chances de que sea Blanca o Negra del otro lado son las mismas.

Sin embargo, yo lo invito a pensar que en realidad no es así. Es decir, la probabilidad de que del otro lado la carta esté pintada de Blanco o de Negro no es 1/2, no es del 50%. Y preferiría no escribir inmediatamente la razón por la que no es cierto lo que dijo.

La/lo dejo con usted mismo y vuelvo en el párrafo siguiente. No desaproveche la oportunidad de *desafiar* su intuición. Créame que vale la pena.

(Las respuestas, en la página 97)

Regresión a la media

En una época (allá lejos, en la década de 1960 y parte de la de 1970), la revista deportiva *El Gráfico* era importante. Todavía era una revista seria. Es decir, todos los que fuimos niños/adolescentes en ese momento esperábamos su aparición como si fuera la Biblia en fascículos coleccionables: religiosamente, todos los lunes por la noche, cerca de las siete y media, aparecía el camión que repartía (entre otras cosas) nada menos que *El Gráfico*. Hoy, obviamente, ya no queda nada de eso. Pero la referencia que quiero hacer es que en aquella época se decía que los que salían en la tapa de la revista, quedaban "enyetados". Era como someterse a una suerte de maleficio. Según esta idea, el orgullo que le representaba al atleta aparecer en la portada se desvanecería abruptamente y lo más probable es que se produjera una fuerte y sensible baja en su producción.

Todo esto, naturalmente, formaba parte de una fértil imaginación, causada por la avidez por creer en semejantes estupideces. Pero con el tiempo descubrí que hay otros países en donde sucedía (y sucede) un fenómeno similar. El equivalente de nuestro *El Gráfico* en Estados Unidos es la revista *Sports Illustrated* ("Deporte Ilustrado"). Un par de semanas atrás leí en varios lugares

que lo mismo que se decía en la Argentina, también se decía allá. Más aún, hay una página en Internet,[20] que recolecta datos para reafirmar el argumento.

Ahora bien, ¿por qué hacer una comparación entre estas revistas? ¿Por qué habría de suceder en la Argentina y en los Estados Unidos un fenómeno similar? ¿Se puede —acaso— encontrar una explicación? Más aún, ¿tiene la matemática algo para decir de todo esto?

En el año 1886 el científico inglés sir Francis Galton publicó un artículo fundacional: "Regression towards mediocrity in hereditary stature" (algo así como "Regresión a la media en la estatura heredada"). Más allá del título pomposo, lo que el científico hizo fue poner a prueba una hipótesis: el hecho de que una pareja de padres fueran más altos que la estatura media no era una condición que heredarían inexorablemente sus hijos. Y lo mismo del otro lado: hijos de padres de alturas por debajo de las normales, tenderían a ser más altos que sus progenitores.

Tomando una muestra de 205 parejas de padres y sus 928 hijos, Galton comprobó que cuando la altura promedio de los padres era mayor que la de la población media, sus hijos tendían a ser más bajos que sus padres. Y de la misma forma cuando la altura promedio de los padres era menor que los de la media de la población, los hijos tendían a ser más altos.

Más aún: con el paso del tiempo, y de sucesivas generaciones, todo tiende a normalizarse. Esto se conoce con el nombre de "Regresión a la media".

Ya voy a volver a la interpretación que se puede hacer de los que salían en las tapas de las dos revistas (*El Gráfico* y *Sports Illustrated*). Primero quiero poner un par de ejemplos más.

---

20. La página en Wikipedia es http://en.wikipedia.org/wiki/Sports_Illustra ted_Cover_Jinx.

Cuando aparece un tratamiento nuevo o una nueva droga para tratar alguna enfermedad, muchos médicos tienden a probarla con sus pacientes más enfermos. Lo que suele suceder —en general— es que se produce una reacción muy favorable en estas personas. Pero el cuidado que hay que tener es que la "regresión a la media" suele infectar las conclusiones. Es decir, puede que la droga haya tenido el efecto que se esperaba, pero no es posible descartar que esos mismos pacientes hubieran mejorado independientemente de su aplicación por el simple hecho de la regresión a la media. En todo caso, lo que estoy diciendo es que antes de sacar conclusiones conviene tener en cuenta este hecho estadístico.

Otro ejemplo muy utilizado es el siguiente. Cuando se incrementan los accidentes de tránsito, digamos en una ruta muy transitada, suelen producirse cambios en las políticas preventivas: reducción de la velocidad máxima, utilización de cinturones de seguridad, instalación de cámaras para perseguir a los infractores y demás. Pasado un tiempo, se advierte que efectivamente los siniestros disminuyen y, por lo tanto, las autoridades o autores intelectuales de todas las medidas hablan del efecto que tuvieron en reducir los accidentes. Por supuesto, es muy probable que hayan tenido incidencia, pero lo que no puede descartarse para sacar cualquier conclusión es, una vez más, la regresión a la media. No incluir este factor en cualquier análisis es hacer una interpretación tendenciosa de la nueva realidad.

De la misma forma, cuando un niño obtiene resultados muy pobres en sus pruebas en el colegio y sus padres lo castigan o reprenden y se ve una mejora, adjudicar este incremento en la producción al método usado es sacar una conclusión posiblemente equivocada. En la sucesión histórica, el niño volverá a producir lo que hizo en promedio. De la misma forma, si obtiene notas

que están por encima de lo que obtenía siempre es muy posible que en pruebas posteriores decrezca su prestación. Concluir que ahora ya se durmió en los laureles, o que ya no se dedica tanto como antes, es también potencialmente equivocado.

Lo que lleva históricamente a atletas de todos los países a aparecer en la tapa de las revistas más famosas son producciones que superan la media, no sólo la media general, sino la de ellos mismos. Solamente un grupo muy muy reducido puede mantener ese nivel. Lo más probable es que vuelva a la normalidad, o sea, que se produzca una regresión a la media. En lugar de entenderlo así, es más fácil decir que salir en la tapa trae mala suerte. Quizás sea así, no lo sé.

Pero lo que sí sé, es que no tener la información suficiente ni estar preparado para interpretar la realidad ya no es adjudicable al azar, sino a la falta de educación. Y de eso, somos responsables todos.

El problema del basketball en Sausalito, con Alicia, Peter Winkler y Ginóbili[21]

Sausalito es un pequeño pueblo en California. El primero que aparece ni bien uno deja San Francisco y cruza el imponente puente conocido con el nombre de Golden Gate. Pintado de rojo, supuestamente para disuadir a potenciales suicidas que se imaginan saltando desde allí, ofrece otra curiosidad: siempre está siendo pintado, desde una punta hasta la otra. Ni bien los pintores terminan con su trabajo en un extremo del puente, inmediatamente comienzan con la pintura desde el otro lado. Es decir, es un trabajo infinito.

Pero vuelvo a Sausalito. Una tarde de verano, nos sentamos a tomar un café frente del océano. La vista era impecable, pero como había un poco de viento, Alicia me propuso que entráramos en un barcito, más típico de los lugares europeos. Jugo de naranjas mediante, sacó un anotador y me contó un problema que había escuchado de parte de Peter Winkler (matemático norteamericano). Me dijo que sería interesante pensarlo e incluirlo eventualmente en alguna competencia de matemática.

21. Aclaración: Alicia es Alicia Dickenstein, relevante matemática argentina, y Ginóbili es Emanuel Ginóbili, el mejor jugador de basketball argentino de la historia y uno de los mejores del mundo durante esta parte del siglo XXI.

Secretamente, yo tenía la expectativa de que sirviera para alguna columna de *Página/12* o alguno de mis libros. Y así fue.

Pero antes del planteo, quiero hacer una breve observación sobre basketball. Sí, basketball. No se asuste, no hay que saber nada de deporte (si es que a usted no le interesa), solamente hay que tener buena predisposición para entender algo muy sencillo. Acá va.

En la medida que un jugador de basketball compite en la NBA (la liga profesional de los Estados Unidos) se llevan estadísticas de sus logros. Por ejemplo, se contabiliza cuántas veces tira al aro y cuántas veces emboca de las que tira, qué porcentaje de tiros libres convierte de los que ejecuta, cuántos rebotes consigue por partido, entre otros. Pero no se deje intimidar por esto. Es sólo un comentario para ilustrar lo que sigue.

Supongamos que un jugador al comienzo de una nueva temporada lleva en su carrera un porcentaje de aciertos de los tiros libres que ejecuta INFERIOR al 80%. No importa cuánto, pero lo que sí se sabe es que es inferior a ocho de diez. Ese año, el jugador convierte más que su promedio habitual, y al terminar la competencia supera ese 80%. Es decir, ahora, en su carrera, convirtió más de ocho tiro libros cada diez que ejecutó.

La pregunta es: ¿Hay algún momento en el año en el que el jugador convirtió EXACTAMENTE el 80% de los tiros libres?

Lea bien lo que dice más arriba. Se trata de averiguar si el jugador tuvo que estar exactamente en el 80% de aciertos, o si pudo pasar de menos del 80% a más del 80% sin haberse detenido exactamente en el 80%.

Por ejemplo, si antes de un partido había convertido en su carrera 78 de los 98 tiros libres que tomó, el porcentaje de aciertos se calcula dividiendo 78 por 98, y eso resulta 0,7959… o sea, más de un 79,59% de ese tipo de tiros. Supongamos que en el

partido emboca los ocho tiros libres que toma, la estadística cambia. Ahora, embocó (78 + 8) = 86 tiros de los (98 + 8) = 106 que tiró. Para calcular el porcentaje, dividimos 86 por 106, se obtiene 0,8113207… o sea, más de un 81,13%.

Como se ve, pasó de más de un 79,59% a más del 81,13%. De ahí, que tenga sentido la pregunta: ¿hubo algún momento del partido en el que pasó EXACTAMENTE por 80%?[22]

Mi primera reacción ante el problema que me planteó Alicia fue equivocada. ¿No le dan ganas de pensar si es algo que siempre tiene que pasar? ¿O puede que no?

Ahora le toca a usted.

(Las respuestas, en la página 100)

22. En este caso, luego de embocar los dos primeros tiros libres que ejecutó, pasó de 78 a 80 convertidos, sobre 100 que tomó. Luego, en ese momento estuvo en el 80%.

El puente flexible

Cuenta la historia que unos ingenieros tuvieron que diseñar un puente muy largo. El problema mayor que tuvieron los impulsores de la medida fue que había que cubrir exactamente 20.000 metros, o sea 20 kilómetros de distancia.[23]

Pero eso no era todo. La temperatura también tenía incidencia. Es que durante los meses de verano el calor era insoportable y el material que se necesitaría para construir el puente debía tener la flexibilidad suficiente como para tolerar las dilataciones que habría de sufrir.

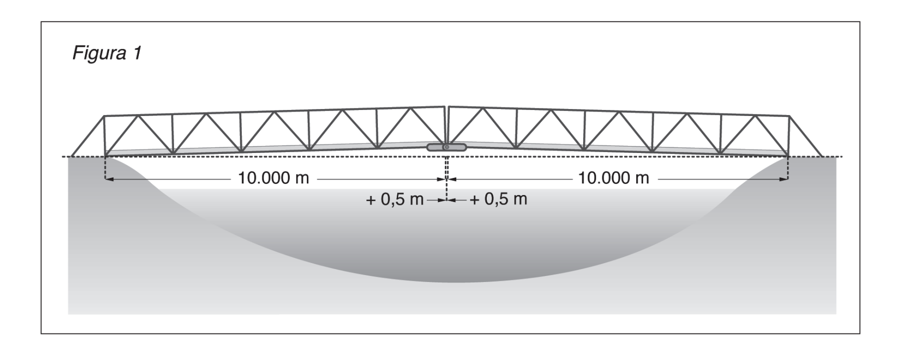
Es por eso que los técnicos propusieron la siguiente solución: construirían el puente (horizontal, por supuesto) en dos tramos enormes de 10.000 metros cada uno. En la mitad, pondrían una bisagra que permitiría que las dos secciones se estirasen hasta medio metro cada una, cosa que en los picos de calor sucedería inexorablemente.

Dicho de otra forma, en el momento de mayor temperatura del año, el puente se elevaría (como se ve en la Figura 1) de la

---

23. El puente más largo del mundo fue inaugurado por China el 1° de julio de 2011. Mide 42,5 kilómetros de largo y fue construido a ambos lados de la bahía de Jiazhou. La obra costó 2.300 millones de dólares y trabajaron 10.000 obreros durante cuatro años.

horizontal, de manera tal de ajustarse al "estiramiento" de los dos segmentos que lo forman.



La pregunta que subyace acá es la siguiente: en el pico máximo de dilatación del material, ¿cuál será la altura que alcanzará el puente, midiendo desde la "base" horizontal?

(La respuesta, en la página 103)

Cómo decidir educadamente

¿Se anima a tomar una decisión? Es decir, yo le voy a proponer una situación (ficticia, claro está) en la que alguien tiene que decidir qué hacer y se supone que usted será el encargado de opinar qué camino conviene tomar.

De hecho, hay dos escuelas públicas que están en una misma ciudad. Todos los niños de la zona se distribuyen entre las dos. La comunidad, representada por los padres de los alumnos, quiere premiar a los maestros por su esfuerzo y, si bien quiere estimular a los dos grupos de docentes que están en cada escuela, también quiere destacar a aquellos que considera que hicieron mejor su tarea.

Son muchos los parámetros que tendrán en cuenta, pero lo que más les importa a los padres es limitar lo más posible el nivel de deserción de los alumnos.

Pero, justamente, quieren tomar una decisión educada, basada en la mayor cantidad de datos que puedan conseguir y no dejarse llevar por el impulso emocional.

Acá es donde interviene usted. Haga de cuenta de que la/lo citan a usted como consultor(a) y le piden que dé su opinión para saber a cuál de los dos grupos docentes es justo premiar.

La situación es la siguiente. Las dos escuelas (llamémoslas A

y B, respectivamente) estuvieron abiertas durante muchos años. Veinte, para ser más precisos. En el camino, tuvieron a su cargo muchísimos niños.

A continuación, los datos. Ahora aparecerán algunos números. No se asuste. Son sólo eso, números. Créame que vale la pena pensar un rato el problema. Todo lo que reflejan es la cantidad total de alumnos, de abandonos y porcentajes que representan. Y si no tiene con qué escribir o en dónde, abajo hay un par de tablas que resumen todo.

A la escuela A concurrieron en total 10.500 niños. De ese total, 315 abandonaron antes de graduarse. Es decir, el 3% de los alumnos.

Por su parte, a la escuela B, que es un poco más chica en tamaño, asistieron 4.000 niños, de los cuales abandonaron 80. Es decir, el 2%.

Con esta información, parece que está todo claro, ¿no? El reconocimiento mayor lo tendría la escuela B porque, si bien allí hubo menos alumnos, la tasa de deserción fue mucho más baja: el 2% contra el 3% de la escuela A.

Cuando ya estaba todo preparado para comunicar la decisión, apareció una nueva información que no había sido considerada y que quiero poner a disposición de usted para saber si lo que usted estaba pensando hasta acá sigue en pie.

Los nuevos datos dicen lo siguiente:

En la escuela A, los 10.500 alumnos se dividieron entre 3.000 varones y 7.500 mujeres.

De los 3.000 varones, solamente 30 no terminaron el colegio. O sea, el 1%

De las 7.500 mujeres, 285 no se graduaron (el 3,8%)

Y en la escuela B, los 4.000 alumnos se divieron entre 3.000 varones y 1.000 mujeres.

De los varones, solamente 40 no terminaron sus estudios (el 1,33%) y las mujeres que abandonaron fueron también 40, o sea, el 4%.

Para resumir, vea las dos tablas que figuran acá abajo.

Con los datos iniciales, uno tiene un cuadro así:

	Total alumnos	**Deserciones Total**	**Porcentaje**
Escuela A	10.500	315	3%
Escuela B	4.000	80	2%

Con los datos adicionales, se tiene este cuadro:

	Varones	**Muje-res**	**Total**	**Varones que abando-naron**	**Mujeres que abando-naron**	**Porcentaje de varones que aban-donaron**	**Porcentaje de mujeres que aban-donaron**
Escuela A	3.000	7.500	10.500	30	285	1%	3,8%
Escuela B	3.000	1.000	4.000	40	40	1,33%	4%

¿Y ahora? Aunque parezca una sopa de números y porcentajes, le sugiero que revise las dos tablas con cuidado y repiense lo que había concluido antes.

Antes de contar con estos datos parecía obvio que la escuela B merecía el reconocimiento teniendo en cuenta que tenía un 2% de deserción y la escuela A, un 3%.

Sin embargo, después de ver los últimos números, si uno compara en forma separada las deserciones por sexo, los varones de la escuela A abandonaron menos (1% vs. 1,33%) que la escuela B, y lo mismo sucedió con las mujeres (3,8% vs. 4%).

Y la matemática muestra cómo a pesar de que en cada categoría a la escuela A le va mejor que a la B, en los totales es al revés.

Casos como éste, que la matemática exhibe con simpleza y contundencia, invitan a pensar que no siempre es sencillo tomar decisiones basadas en pocos datos, y que casos sensibles pueden devenir en verdaderas injusticias. Y muchas veces también las estadísticas pueden ser manipuladas, si no son examinadas con cuidado.

Para terminar, si dependiera de mí, o si yo fuera el consultado por los padres, me declararía incompetente. O mejor aún, preferiría premiar a los dos grupos, aunque más no sea por una (aceptada) deformación profesional, y por el respeto que me merecen aquellos que diariamente se dedican a la tarea más extraordinaria que tiene una sociedad: educar.

¿Por qué pudo pasar esto? (¿quiere pensarlo usted?).

Uno advierte que:

- No puede "despreciar o desconsiderar" la diferencia que hay entre el número de alumnos de una y otra escuela. Todo funcionaría bien si se respetaran las proporciones de cada sexo, pero esto no sucede.
- Por otro lado, mientras el número de varones es el mismo, el número de mujeres de la escuela A es más de 7 veces el que tiene la escuela B.

Las deserciones femeninas guardan la proporción que uno esperaría: 285 versus 40, que es un poco más de 7 veces, pero esto es lo que sucede con el total: 7.500 versus 1.000 (un poco más de 7 veces también).

Pero la situación con los varones es la que distorsiona los valo-

res. A igual número (3.000 y 3.000) en la escuela B se producen un 30% más de deserciones que en la A: 40 deserciones en la B versus 30 en la A. Y esa diferencia tan grande en el porcentaje es la que produce la descompensación que sorprende a primera vista.[24]

24. Este resultado invita a tener cuidado con las conclusiones que uno está dispuesto a sacar en la vida cotidiana cuando nos son presentadas estadísticas y/o gráficos por televisión o en un diario, y uno no se toma el tiempo necesario para hacer un análisis como el que desarrollamos.

Un reloj y la curiosa manera de interpretar los números

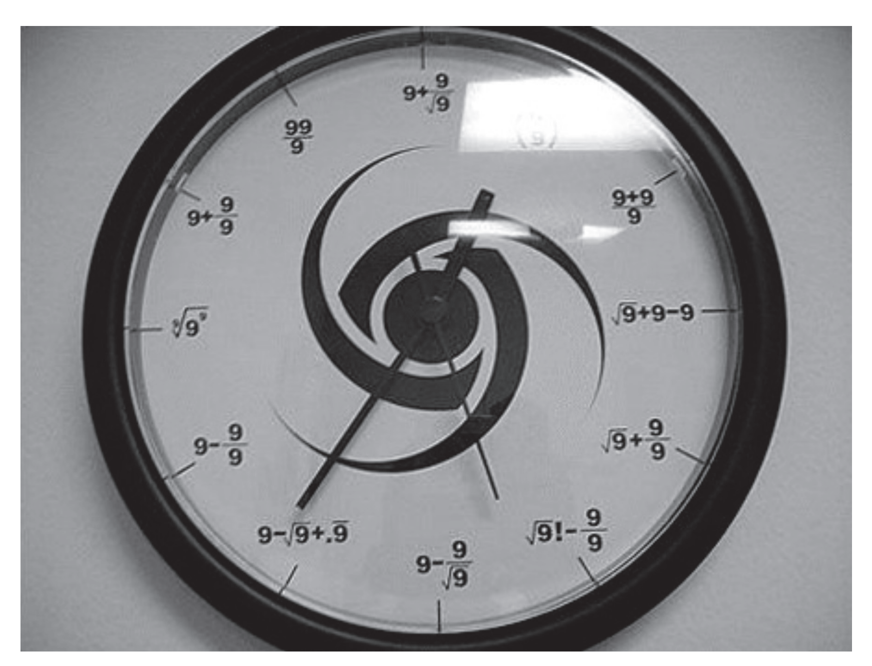


Foto: Triple Nine Society, http://www.cafepress.com/triplenine#housewares

$$9 + 9/\sqrt{9} = 9 + 3 = 12$$

$$\binom{9}{9} = \binom{9}{0} = 1$$

$$(9 + 9)/9 = 2$$

$$\sqrt{9} + 9 - 9 = 3$$

$$(\sqrt{9}) + 9/9 = 3 + 1 = 4$$

$$(\sqrt{9})! - 9/9 = 3! - 1 = 6 - 1 = 5$$ [25]

$$9 - 9/\sqrt{9} = 9 - 9/3 = 9 - 3 = 6$$

$$9 - \sqrt{9} + 0{,}99999999\ldots^{*} = 9 - 3 + 1 = 7$$

$$9 - 9/9 = 9 - 1 = 8$$

$$\sqrt[9]{9^9} = 9$$

$$9 + 9/9 = 9 + 1 = 10$$

$$99/9 = 11$$

---

25. El factorial de un número entero positivo *n* se expresa poniendo un signo de admiración al final: n!, e indica que uno multiplica todos los números que van desde *n* hasta 1. Es decir, n! = n.(n-1).(n-2).(n-3)…..3.2.1. En este caso, 3! = 3.2.1, y por eso el resultado es 6.

* 0,999999... es el número 0,9 periódico.

Solución a "Apuestas en el casino"

Cada vez que el señor acierta con el resultado (cara o ceca), multiplica su capital por (3/2). Cada vez que pierde, divide su capital por la mitad, o sea, es como si lo multiplicara por (1/2).

Se trata, entonces, de contar cuántas veces acertó y cuántas erró.

Si de las 10 veces, acierta 6 y erra 4, lo que uno tiene que calcular es:

$$(3/2) \times (3/2) \times (3/2) \times (3/2) \times (3/2) \times (3/2) = (3/2)^6 = 11{,}39$$
(aproximadamente)

y por otro lado,

$$(1/2) \times (1/2) \times (1/2) \times (1/2) = (1/2)^4 = 0{,}0625$$
(aproximadamente también)

Luego de multiplicar estos dos números entre sí (que sería el equivalente de haber arrojado la moneda 10 veces, con 6 resultados a favor y 4 en contra), se trata de averiguar si el número es mayor que 1 o no.

Si es mayor que 1, eso significa que el señor saldrá ganando después de haber apostado las 10 veces. En cambio, si el número por el que va a terminar multiplicando su capital es menor que 1, entonces, el señor saldrá con menos dinero del que ingresó.

En este caso, lo que hay que hacer entonces es multiplicar

$$(3/2)^6 \times (1/2)^4 = (11{,}39) \times (0{,}0625) = 0{,}71191$$

En consecuencia, si gana 6 y pierde 4, terminará perdiendo dinero, ya que habrá multiplicado su capital por 0,71191.

En cambio, si gana 7 y pierde 3, hay que calcular:[26]

$$(3/2)^7 \times (3/2)^3 = 2{,}135$$

Luego, en ese caso, el señor se iría del casino con más del doble del dinero que con el que ingresó.

Falta aún contestar un par de preguntas más.

Si arrojaran la moneda 100 veces y el que lleva el dinero gana 55 veces y pierde las restantes 45, entonces el resultado es sorprendente. Al menos, lo fue para mí (¿lo intentó hacer usted por su cuenta? Hágalo, vale la pena).

La cuenta que uno debe hacer es:

$$(3/2)^{55} \times (1/2)^{45} = 0{,}000137616$$

Es decir, que si jugaran 100 veces, y el señor que apuesta hubiera ganado 55 de las 100 tiradas, al finalizar el proceso tendría casi una diezmilésima parte de lo que traía; o sea, un poco más de 10 centavos (más precisamente 13,76 centavos).

Eso contesta la pregunta 3. Si ahora uno quiere saber cuántas veces podría permitirse el lujo de perder (de las 100 tiradas) para no perder dinero, se trata de encontrar la primera combinación de números *m* y *n*, de manera tal que

$$(3/2)^m \times (1/2)^n \text{ sea un número mayor que 1, y}$$
$$(m + n) = 100$$

26. Todos los resultados que figuran son aproximaciones de dos o tres decimales.

Para eso, hace falta tener una calculadora a mano. Yo pongo acá el resultado, pero vale la pena que usted confronte lo que va a leer con la realidad.

En todo caso, si uno calcula:[27]

$$(3/2)^{64} \text{ x } (1/2)^{36} = 2{,}708698927$$

---

27. El primer quiebre se produce cuando la cantidad de aciertos es 63 y de desaciertos es 37. Sin embargo, sin recurrir a una computadora y tener que revisar todos los números, la manera de resolverlo es plantear que uno quiere encontrar el número *n*, tal que

$$(3/2)^{n} \text{ x } (1/2)^{(100-n)} > 1$$

Y para calcular este número *n*, uno calcula el logaritmo de los números involucrados, y lo que tiene que descubrir es cuál es el *n* que resuelve esta ecuación:

$$\ln((3/2)^{n} \text{ x } (1/2)^{(100-n)}) = n \text{ x } \ln(3/2) + (100-n) \text{ x } \ln(1/2) \quad (*)$$

Lo que uno quiere es ver cuándo este número es mayor que el ln (1) = 0. O sea, se trata de calcular cuál es el primer número natural *n* que hace que el número (*) sea positivo.

En ese caso, n x ln (3/2) + (100–n) x ln (1/2) = n x (ln(3) – ln(2)) + (100–n) (ln(1) – ln(2)) , y usando que ln(3) = 1,0986 , ln (2) = 0,6931) y ln (1) = 0 , se tiene:

$$n \text{ x } (1{,}0986) - 100\,(0{,}6931) > 0 \text{ si y sólo si}$$

$$n > 100 \text{ x } (0{,}6931)/(1{,}0986) = 63{,}09$$

En consecuencia, hace falta que el apostador acierte por lo menos 64 veces para poder irse del juego ganando dinero.

y

$$(3/2)^{63} \times (1/2)^{37} = 0{,}902899$$

uno descubre que el señor que apuesta puede perder hasta 36 veces (y ganar las otras 64, claro está) y en ese caso, casi triplicará su capital. Pero si en lugar de perder 36 veces, pierde 37, entonces ya se irá del juego con apenas un poco más del 90% del dinero con el que entró.



Solución a "Embustero"

Ahora sigo yo. En realidad, le sugiero que hagamos juntos un modelo[28] que sirva para representar lo que pasa con las cartas y el sombrero.

Tomemos un cubo cualquiera (como si fuera un dado pero sin los números). O sea, un cubo pero con las caras limpias. Voy a hacer lo siguiente: voy a pintar cada cara del cubo tratando de simular lo que recién teníamos con las cartas. Sígame.

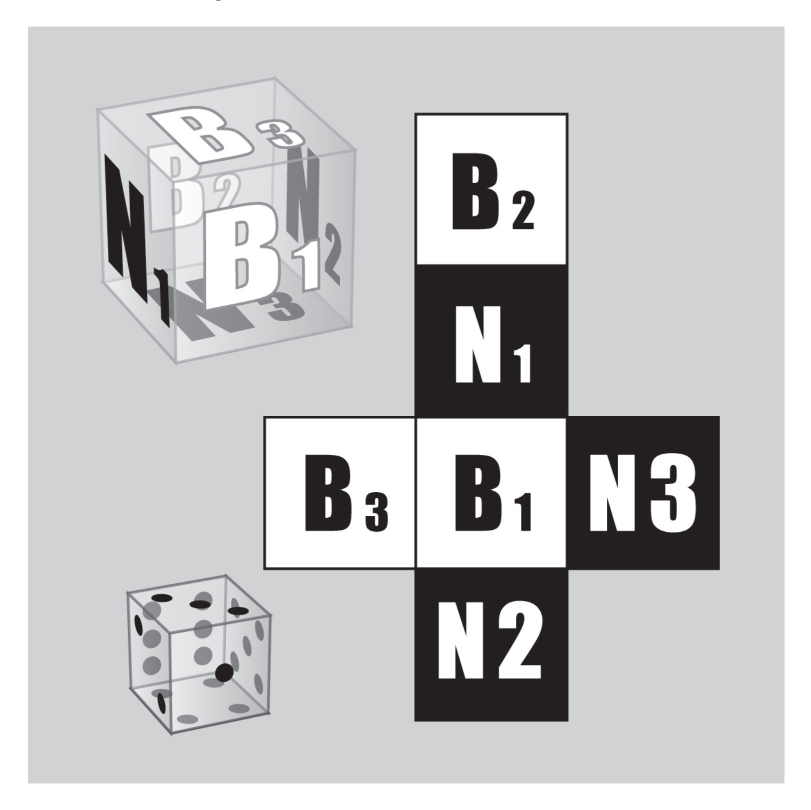
Como una de las cartas tenía las dos caras de blanco, digamos B_1 y B_2, entonces pinto dos caras opuestas del cubo de color Blanco.

Como la segunda carta tiene Blanco de un lado (B_3) y Negro (N_3) del otro, entonces pintamos otras dos caras opuestas del cubo una de blanco y la otra de negro.

---

28. En la edición de *Página/12* del 27 de noviembre de 2008 escribí una versión diferente del mismo problema y usé la misma modelización. En cualquier caso, esto sirve para comprobar —una vez más— cómo funciona el pensamiento matemático. Aunque los problemas tengan enunciados diferentes, en esencia son el mismo. Y, por lo tanto, es esperable que su solución sea la misma también.

Y, finalmente, como la tercera carta tiene los dos lados pintados de Negro (N_1 y N_2), entonces, pinto las dos caras restantes del cubo de color negro.



¿Está de acuerdo conmigo con esta representación que elegí para las tres cartas? No acepte lo que yo escribí sin debatirlo internamente hasta convencerse de que o bien está de acuerdo conmigo o hay algo que yo hago mal. Piénselo.

Esta modelización pretende transformar el problema original en uno que podamos manejar de otra forma y quizás sirva para entenderlo mejor (al problema).

Puesto en términos del dado o del cubo, que el señor haya

elegido una carta que tiene un lado pintado de blanco, es equivalente a haber tirado el dado y que hubiera salido una cara pintada de blanco.

Y el dueño del sombrero dice que está dispuesto a apostar 100 pesos a que del otro lado del dado (en la cara opuesta) hay también una cara pintada de blanco. Y usted, duda si le conviene aceptar o no, o si las chances son parejas o las mismas para cada uno.

Pero fíjese lo siguiente. Como el color de la cara que salió al tirar el dado fue blanca, esto significa que pudo haber sido o bien la cara B_1 o B_2 o B_3 (siguiendo los nombres que puse más arriba). Y acá viene lo interesante (y sorprendente al mismo tiempo). Si la cara que salió es B_1, entonces del otro lado hay B_2. Pero si salió B_2, entonces del otro lado está B_1.

Y sólo en el caso de que hubiera salido B_3, del otro lado está N_3.

Es decir, que hay una sola posibilidad de que del otro lado esté la cara negra (N_3), contra *dos* posibilidades de que del otro lado haya una cara blanca (o bien B_1 o bien B_2).

Luego, sobre tres posibilidades, el embustero tiene dos a favor y una en contra. ¡A usted no le conviene jugar el juego! (salvo que esté dispuesta/o a perder dinero).

Más aún: la probabilidad de que él gane es 2/3, y la suya es un 1/3. No juegue. Al menos, no con estas reglas.

Moraleja: Muchas más veces de las que uno advierte, hay matemática involucrada y uno no está preparado. Uno cree que toma una buena decisión, pero no necesariamente es así. En particular, por ejemplo, cuando uno compra un objeto a plazos o pide un crédito o decide asegurar un objeto. No todos los casos son iguales, por supuesto, pero conviene estar atento. Y educado: es lo que más ayuda para tomar decisiones.



Solución a "El problema del basketball en Sausalito..."

Mi primera reacción fue decir que no, que no necesariamente tiene que ser cierto. Y me embarqué en tratar de construir un ejemplo. Es decir: yo sabía que en algunos casos (como el que escribí más arriba) luego de tirar (y embocar) dos tiros más, pasó de 78 a 80 tiros convertidos y de 98 a 100 ejecutados. Justo ahí se ve que 80 dividido 100 es exactamente 80%. O sea, en ese ejemplo se ve que es cierto. Pero, ¿será verdad que siempre tiene que pasar, sin que importe el caso que uno considere?

Y la respuesta es que sí. Acompáñeme y hagamos el razonamiento juntos.

Para eso, le propongo que supongamos que hay algunos casos en los cuales eso no sucede. Es decir, que uno debería ser capaz de construir un ejemplo, en donde el jugador pueda pasar efectivamente de menos del 80% a más del 80% sin haber estado EXACTAMENTE en el 80% en ningún momento.

Sígame ahora con este argumento. Si pasó de menos del 80% a más del 80% sin haber estado en el 80%, eso significa que en algún momento de ese partido hipotético estuvo justo antes de ese 80%, y ni bien convirtió el siguiente tiro, pasó a más del 80%.

Luego, llamo A a los tiros que había embocado hasta allí, y *B* a los tiros que había convertido.

Pero entonces, sabemos que

$$A/B < 8/10 \quad (*)$$

pero que ni bien tira (y convierte) el próximo tiro,

$$(A + 1)/(B + 1) > 8/10 \quad (**)$$

Todo esto, se puede resumir así:

$$A/B < 8/10 < (A + 1)/(B + 1) \quad (***)$$

Luego de la desigualdad (*) se tiene:

$$10 \times A < 8 \times B \quad (\wedge)$$

y de la segunda parte de la desigualdad (***), se sigue que:

$$8 \times (B + 1) < 10 \times (A + 1)$$

$$8 \times B + 8 < 10 \times A + 10 \quad (\wedge\wedge)$$

Ahora, de acuerdo con (^), uno sabe que $10 \times A < 8 \times B$ y si lo reemplazo en (^ ^), se obtiene esta desigualdad:

$$10 \times A + 8 < 8 \times B + 8 < 10 \times A + 10 \quad (\wedge\wedge\wedge)$$

Y esto último es decisivo, porque si uno se fija en (^ ^ ^), advierte que el número

$$8 \times B + 8$$

está entre $(10 \times A + 8)$ y $(10 \times A + 10)$.

Luego, no le queda más remedio que ser $(10 \times A + 9)$.

O sea, uno deduce que son iguales estos dos números:

$$8 \times B + 8 = 10 \times A + 9$$

¿Puede ser posible esto? La respuesta es que *no.* Esto no es posible porque el número de la izquierda es un número par, y el de la derecha es un número impar. Y eso es claramente una contradicción.

¿De dónde provino la contradicción? Bueno, se origina en haber supuesto que se podía pasar de un número inferior al 80% a otro que fuera superior (a ese mismo 80%), sin haber estado en algún momento "sentado" en 80% EXACTAMENTE.

Moraleja: Con este argumento, queda demostrado que no importa cómo un jugador pasó de menos del 80% a más de ese porcentaje. No importa en cuántos partidos, en qué condiciones ni nada. Lo que uno aprende es que, inexorablemente, tuvo que haber estado en exactamente un 80% en algún momento de ese juego en el que pasó de un porcentaje a otro.

Otro dato curioso.

Lo interesante es que todo esto que probamos para un 80% NO ES CIERTO para todos los porcentajes. Por ejemplo, no es cierto para el caso de un 70%.

Este ejemplo es aclaratorio en ese sentido:

Un jugador puede pasar de 2 de 3 (un 66,66…%) a embocar 3 de 4 (o sea, un 75%). Sin embargo, en ningún momento estuvo en un 70% exactamente.[29]

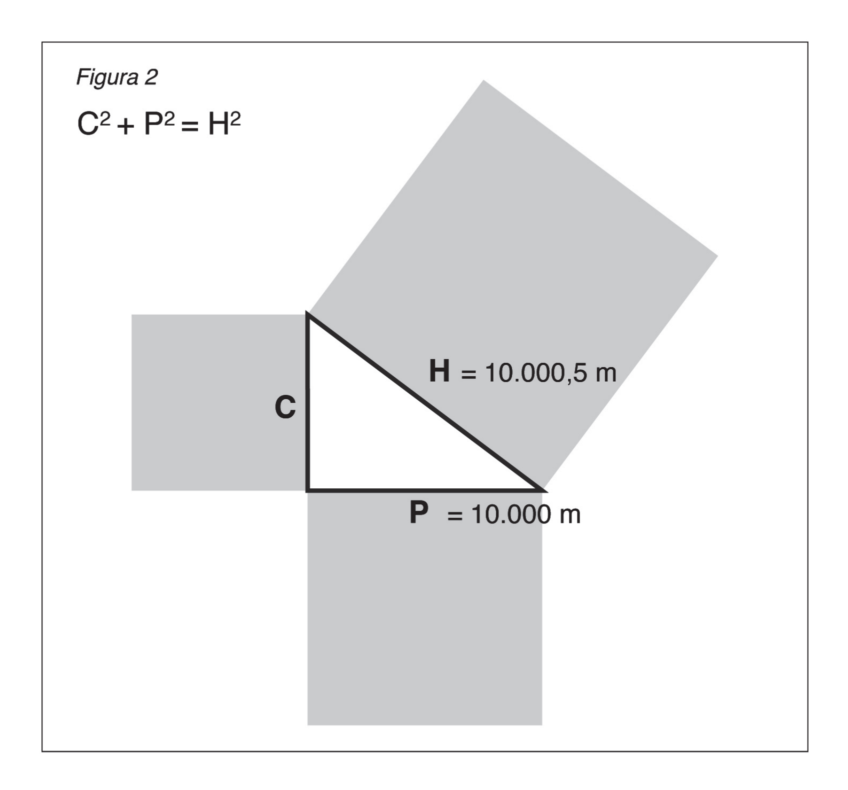
---

29. Para aquellos interesados en avanzar un paso más, usando un poco de aritmética y con las mismas reglas, no es difícil demostrar que los únicos números que satisfacen esta propiedad son los que son de la forma *(k-1)/k*. Por ejemplo, 0,8 (o sea, el equivalente en el problema al 80%) se puede escribir Como 0,8 = 4/5. En cambio, esto no es cierto para 0,7.

♦♦♦

Solución a “El puente flexible”

Por supuesto, como todo problema matemático no hay necesariamente una única manera de contestar la pregunta. De todas formas, si usáramos el teorema de Pitágoras, uno podría calcular la longitud o la medida de uno de los catetos C. Sabemos la medida de la hipotenusa H (que es el segmento dilatado en medio metro), o sea, 10.000,5 metros, y la medida de la mitad del puente sin dilatar P (ver Figura 2), o sea, de 10.000 metros.



De acuerdo con el teorema, se sabe que

$$C^2 + P^2 = H^2$$

Es decir,

$$C^2 + (10.000)^2 = (10.000{,}5)^2$$

Luego, como queremos calcular C,

$$C^2 = (10.000{,}5)^2 - (10.000)^2$$

$$C^2 = 100.010.000{,}25 - 100.000.000$$

$$C^2 = 10.000{,}25$$

En consecuencia, calculando la raíz cuadrada positiva de ambos lados, se tiene

C = (aprox.) ¡¡¡100 metros!!!

O sea, acabamos de descubrir que, permitiéndole una dilatación de NADA MÁS que medio metro a un puente de 10 kilómetros, la altura del puente en el momento de mayor calor, es de ¡100 metros![30]

---

30. Es una conclusión verdaderamente sorprendente. Por supuesto, este problema es inventado o imaginado. No sé si existe algún puente en el mundo que verifique estas condiciones.

ESTRATEGIAS

El tren y la mosca

En la matemática pasa lo mismo que en el arte: la calidad perdura, los clásicos sobreviven al paso del tiempo, la belleza resiste cualquier embate de lo coyuntural. Digo esto porque hay ciertos problemas que se mantienen a lo largo de los años. Aparecen otros, muchos otros, que van quedando desubicados u olvidados, pero en la música, por ejemplo, *La Traviata* y *Aída* quedan, así como en la pintura *La Gioconda* y el *Guernica* trascienden las generaciones.

El caso que voy a presentar ahora tiene una larga historia. No sé cuándo fue la primera vez que fue presentado en sociedad, pero lo que sí puedo afirmar es que es uno de los problemas más famosos que existen dentro de la matemática recreativa.

El enunciado es sencillo (como la mayoría de los problemas trascendentes dentro de esta área) y la solución, también.

Mi experiencia me sugiere ofrecerle tres visiones:

- Si usted elige el camino adecuado para pensarlo, y por lo tanto encuentra la solución muy rápidamente, no entenderá por qué hago esta presentación. Es más, le parecerá un problema más.
- Si usted tiene que invertir una buena porción de su tiem-

po para resolverlo pero luego encuentra la autopista que lo lleva al resultado, sentirá la satisfacción de aquel que hizo un esfuerzo placentero y valioso. Es más, seguro disfrutará del trayecto.

- Si en cambio usted invirtió una buena porción de su tiempo para pensarlo pero no pudo arribar a la solución por sus propios medios, permítame sugerirle algo: no abandone. Como siempre le queda el recurso de leer más abajo la distancia que recorrió la mosca, pero usted sabe que esa herramienta la tiene a mano para usarla cuando quiera. En todo caso, si espía la solución, se priva de pensarlo. Y en definitiva, ¿qué sentido tendría?, ¿qué gracia pueden tener estos problemas que no sea la satisfacción que da pensarlos, y no tanto "resolverlos"?

Antes de enunciar el problema, una advertencia: no hay forma que en su vida usted se tropiece con la dificultad que sigue más abajo. Cero. Nunca le va a pasar. Pero lo que sí puede pasarle es que el camino que usted recorra para pensar la respuesta lo tenga que usar nuevamente, aunque usted mismo nunca lo advierta. Son los caminos que se abren en la mente, ángulos para pensar que uno no sabía que existían… hasta que los descubre o los construye.

Ahora sí, el problema:[31] suponga que hay dos trenes que están a punto de recorrer un camino de 100 kilómetros. Justamente 100 kilómetros es la distancia que los separa. Lo curioso es que ambos están sobre la misma vía, de manera tal que inexorablemente en algún momento van a chocar de frente. Ambos trenes andan a 50 kilómetros por hora.

---

31. Hay muchísimas versiones. Yo elegí una cualquiera, en la que las cuentas que hay que hacer son sencillas para no desviar la atención de lo esencial.

Por otro lado, hay una mosca situada en la locomotora de uno de los trenes. Esta mosca es muy particular: tiene la habilidad de volar muy rápidamente. Lo hace a 75 kilómetros por hora. Más aún, cuando los trenes se pongan en marcha *simultáneamente* la mosca también empezará a recorrer la distancia que va entre un tren y otro. Ni bien llega a la locomotora del que viene de frente, da vuelta instantáneamente y se dirige ahora hacia el otro tren.

El proceso se repite hasta el momento en el que los dos trenes chocan (con la mosca en el medio).

La pregunta es: ¿cuántos kilómetros recorrió la mosca (antes de morir aplastada entre las dos locomotoras)?

(La respuesta, en la página 123)

Cien personas con sombreros

Se tiene a 100 personas en una habitación, con sombreros blancos y negros. Cada uno puede ver lo que tienen todos los otros, SALVO el sombrero que tienen ellos mismos.

Pueden planificar una estrategia PREVIA, pero NO pueden comunicarse entre sí una vez que están dentro.

A la orden de una persona TODOS al mismo tiempo deben decir qué color de sombrero tienen. Los que acierten, sobreviven. Los que erran, mueren.

¿Puede encontrar una estrategia que GARANTICE que al menos 50 de las personas van a sobrevivir?

Nota 1: El problema se puede plantear como que uno tiene un número PAR de personas (digamos 2n) y todos tienen sombreros blancos o negros, y se trata de diseñar una estrategia que GARANTICE que la mitad se salva. La idea, como se verá más adelante, es generalizar la estrategia que se usa para 100 personas, para cualquier número par.

Nota 2: Si hay 50 blancos y 50 negros, por ejemplo, y uno elige lo que la mayoría tiene (de lo que ve) MUEREN TODOS. ¿Por qué? Porque supongamos que fuera yo el que tengo que elegir. Si yo tengo color blanco, por elegir un color, es porque de los 99 que quedan, hay 50 negros y 49 blancos (ya que yo tengo uno

de los blancos). Luego lo que yo vería sería una mayoría negra, y por lo tanto, diría que yo tengo NEGRO. Eso implicaría que yo soy "hombre muerto". Pero lo mismo les pasaría a todos los que están conmigo, porque el mismo razonamiento harían todos.

(Las respuestas, en la página 126)

Rompecabezas

El siguiente problema pareciera no tener nada que ver con la matemática. Al menos, lo parece con la concepción clásica, que tiene (¿o tenía?) asociada a la matemática con los números y saber hacer cuentas.

Creo que esa percepción está cambiando. De todas formas, quiero plantearle algo divertido.

Usted, como yo, ha visto muchísimos rompecabezas en su vida. Con más o menos piezas, más o menos difíciles de resolver. Algunas veces habrá tenido paciencia para armarlos, otras no. Otras veces habrá ayudado a un niño, y otras habrá sido usted el niño.

Usted también sabe que hay rompecabezas cuya solución implica invertir muchísimo tiempo, aunque más no sea porque involucran ensamblar un número enorme de piezas. Hay gente que los empieza a armar arriba de una mesa, y se pasa semanas (si no meses) hasta que los termina. Para algunos, es incluso un pasatiempo o un *hobby*.

Por supuesto, cada uno de nosotros establece una estrategia que no tiene por qué ser la misma para cada rompecabezas, y quizás uno ni siquiera sabe que la tiene.

Por ejemplo, uno puede empezar por los bordes, o buscar

colores parecidos, o aquellos que tienen algún patrón en común.

No sé si habrá gente que es profesional en el armado de rompecabezas, pero creo que cada uno de los que está leyendo esto sabe bien a qué me refiero. Más aún, en el proceso de resolución muchas veces uno ensambla distintos bloques y después, casi sin proponérselo, puede pegar un bloque con otro. Es decir, no siempre se trata de ir armando un bloque cada vez más grande al que uno le va agregando una pieza por vez.

Sólo para ponernos de acuerdo con los nombres, voy a llamar "bloque" tanto a las piezas más pequeñas (cuando está todo desarmado), como a cualquier grupo de piezas que ya estén interconectadas.

En realidad, para ser técnicamente correctos, uno tendría que decir que una "pieza" es un "bloque de una sola pieza".

Al mismo tiempo, voy a decir que hago una "jugada" cada vez que logro ensamblar dos bloques. O sea, cada "jugada" que hago implica que tengo menos piezas o bloques sueltos.

Supongamos entonces que uno está frente a uno que tiene 5.000 piezas. Sí, cinco mil. Como verá más adelante, el número de piezas no tiene importancia, pero por ahora, para fijar las ideas, digamos que son cinco mil.

Dicho todo esto, ahora sí, dos preguntas:

- ¿Cuál es el mínimo número de "jugadas" que uno tiene que hacer para poder armar el rompecabezas de 5.000 piezas?
- ¿Qué estrategia puede diseñar para que si uno sigue los pasos que usted indique, quede armado el rompecabezas en ese número mínimo de jugadas?

Una última cosa: no permita que lo confunda todo lo que yo escribí acá arriba. Es algo muy sencillo, uno tiene un rompeca-

bezas, con piezas que al principio están todas separadas. Se trata de conectarlas. Las preguntas son: ¿cuál es el número mínimo de movimientos o jugadas que hay que hacer para armar el rompecabezas? Y, por otro lado, ¿cuál es la estrategia que garantiza que uno lo arma en ese número de movidas?

(Las respuestas, en la página 127)

Estrategia para descubrir un número entre cien

Uno de los temas más fascinantes con los que uno se puede encontrar es tratar de diseñar una estrategia para alcanzar un cierto objetivo. La matemática tiene muchísimo que ver porque ofrece caminos y oportunidades para diseñarlas y, aunque no se utilicen estrictamente para el problema que se plantea en cada caso, sirve para desarrollar caminos e imaginar escenarios posibles.

Por ejemplo: supongamos que una persona tiene los primeros 100 números enteros positivos en una lista y los va a empezar a decir en voz alta en forma desordenada.[32] Usted puede escucharlos pero no puede anotar. Esta persona va a ocupar 5 segundos por cada número.

No sólo eso: va a omitir uno de los 100 números. Va a elegir uno de los 100 y NO LO VA A NOMBRAR. Usted tiene que elaborar una estrategia que le permita deducir qué número fue omitido sin usar papel y lápiz.

Por supuesto, que el problema no tiene trampa ni ningún tipo de truco escondido. Tampoco se trata de que la persona que escucha los números tenga una memoria prodigiosa ni que

32. Escribo "desordenada" para que se entienda que no lee todos los números siguiendo un patrón que pudiera ser percibido por el que escucha.

tenga poderes sobrenaturales. Es una persona como usted y/o como yo.

Ahora la/lo invito a que piense una estrategia.

(La respuesta, en la página 129)

Estrategia con monedas

Vivimos pensando en estrategias. ¿Cómo optimizar el dinero que tenemos? ¿Cómo planificar el fin de semana? ¿Cómo elaborar una excusa creíble por algo que no hicimos? ¿Cómo decirle que no a alguien? ¿Cómo decirle que sí a alguien? ¿Cómo ser justo con un hijo sin que eso origine una reacción en cadena con el/los otro/s? En fin. La lista sigue y es larga. Pero me detengo acá.

Es bueno, entonces, estar preparado para poder acertar más veces que las esperables. Es decir, tratar de poder incrementar nuestras chances de que nos vaya mejor.

La matemática suele servir para modelar situaciones. Es muy poco probable que uno tenga que enfrentarse con el ejemplo que sigue. Sin embargo, pensar en su solución puede proveer una estructura que será útil (eventualmente) para dar respuestas a problemas que uno sí puede llegar a tener. Acompáñeme.

Piense en el siguiente problema:

Dos personas (digamos A y B) tiran una moneda cada una. No tienen comunicación entre sí. Cuando ya se conocen los resultados, cada uno tiene que "adivinar" lo que le tocó al otro.

El problema consiste en establecer una buena estrategia que permita maximizar la probabilidad de que acierten. Es decir, si

no planifican nada, la probabilidad de que ambos acierten es 1/4, como vamos a ver inmediatamente.

Eso sí: cualquier elaboración que hagan tendrán que determinarla antes de tirar las monedas, y no puede haber ninguna comunicación entre ellos una vez que están por arrojar las monedas al aire.

La idea es que usted elabore una estrategia que permita mejorar esta probabilidad. O sea, lograr que los aciertos no sean 1 de cada 4, sino que acierten más veces.

Antes de pasar a la solución, lo invito a que piense por qué, si no planifican nada, la probabilidad de que acierten es 1/4.

Cuando A tiene que decir lo que le salió a B al tirar la moneda, puede acertar o errar. Lo mismo cuando a B le toca decir lo que obtuvo A. Juntando los casos de ambos, se pueden producir estas cuatro situaciones:

- A acierte y B acierte;
- A acierte y B se equivoque;
- A se equivoque y B acierte;
- A se equivoque y B también.

Como se ve, hay solamente una posibilidad (entre las cuatro) de que acierten los dos. Y por lo tanto la probabilidad de que acierten los dos es 1/4.

Ahora lo dejo a usted (con usted misma/mismo) para que trate de elaborar una estrategia que puedan usar los dos que les permita aumentar la probabilidad de que ambos acierten.

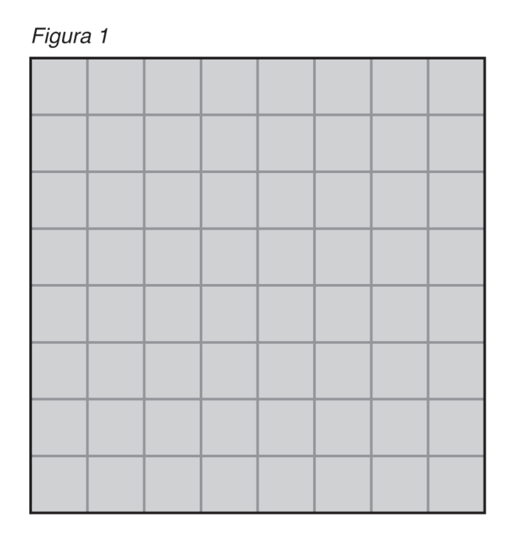
(La respuesta, en la página 131)

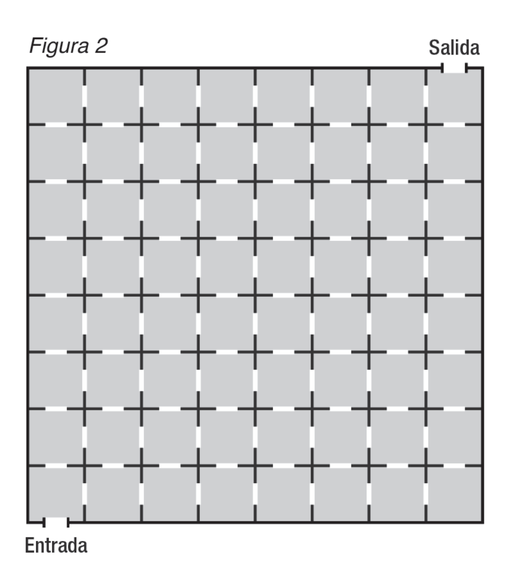
¿Se puede o no salir de un laberinto?

Imagine que usted está parado frente a la puerta de un edificio que tiene 64 habitaciones en la planta baja (Figura 1). Son todas iguales en tamaño: miden 2 m x 2 m (o sea, 4 m^2).

Además, todas tienen una puerta en cada pared, como se ve en la Figura 2. La única particularidad es que hay algunas habitaciones que *no necesitan* tener tantas puertas, pues uno se *saldría del edificio.*

Figura 1





En todo caso, la distribución es la de una grilla o un tablero de ajedrez de 8 x 8.

Una salvedad: hay una puerta de entrada al edificio, que está en el extremo inferior izquierdo y otra de salida que está en el extremo superior derecho.

La pregunta que quiero hacer es la siguiente: ¿es posible entrar en el edificio (por la puerta de entrada) y salir (por la puerta de salida) recorriendo todas las habitaciones pero pasando solamente una vez por cada una?

La/lo dejo pensando.

(La respuesta, en la página 134)

Cinco torres inofensivas

Hay mucha gente que juega al ajedrez en el mundo, mucha. Y hay muchos otros que no. También son muchos. En todo caso, lo que yo puedo decir es que yo sé mover las piezas, pero nada más. O sea, conozco qué movimientos son permitidos y cuáles no para cada una de ellas.

Pero no voy a hablar de ajedrez acá, sólo quiero plantear un problema[33] muy lindo y muy entretenido que requiere de saber una sola cosa sobre el ajedrez y es cómo mueven las torres.

Y si usted se está imaginando un tablero de ajedrez las torres pueden desplazarse por el tablero hacia arriba, hacia abajo, hacia la derecha o hacia la izquierda, pero siempre siguiendo una fila o una columna en forma horizontal o vertical, pero nunca en diagonal.

Es todo lo que se necesita saber para poder entender lo que voy a contar. Eso sí: en lugar de tener un tablero convencional de

---

33. El crédito por este problema está compartido por dos matemáticos rusos: S. G. Slobodnik y A. Soifer que lo publicaron en 1973. La prueba que figura más arriba está basada en una de las tres ideas que ellos proponen para encontrar la solución. En el libro *Mathematics as Problem Solving*, publicado por la editorial Springer, están las otras dos formas de abordar la misma situación.

ajedrez (de 8 x 8), supongamos que uno tiene un tablero un poco más grande, de 10 x 10 (de 10 filas por 10 columnas).

Además, en lugar de tener dos torres por participante (como en el verdadero ajedrez) supongamos que le entregan 41 (cuarenta y una) torres, y le piden que las distribuya de la forma que quiera entre los 100 casilleros (el resultado de hacer 10 x 10).

El desafío es probar que, sin importar cuál sea la distribución que usted haya hecho de las torres, yo puedo encontrar cinco que no se atacan[34] entre sí. ¿Quiere intentar?

Es decir, trate de ver si le es posible distribuir las 41 torres de manera tal de que NO HAYA cinco inofensivas entre sí, o sea, que no se ataquen entre sí.

(La respuesta, en la página 136)

---

34. Que dos torres se ataquen entre sí quiere decir que estén en la línea de acción de ambas, de manera tal que están ubicadas en la misma fila o la misma columna del tablero.

Solución a "El tren y la mosca"

Este problema, como la mayoría de los que trato de presentar, tiene múltiples lecturas. Hay un intento de solución que es típico y que aparece virtualmente en todas las personas con las que he hablado sobre este tema. Se trata de empezar a sumar las distancias que va recorriendo la mosca en cada trayecto que va entre cada una de las dos locomotoras. Los segmentos que va recorriendo son cada vez más pequeños y, en principio, no hay ninguna razón para no intentar hacer ese cálculo. De hecho, lo incluí más abajo como una nota al pie.[35]

---

35. La mosca viaja a 75 km/h, lo que significa que en un tiempo T, recorrió

$$(75 \text{ km/h}).T.h$$

Por ejemplo, si T = 2 horas, entonces, la mosca recorre (75 km/h) x (2 h) = 150 kilómetros. De la misma forma, dado cualquier tiempo T cada tren recorre (50.T) kilómetros. ¿Qué *distancia* recorre la mosca desde que empieza el experimento hasta que se encuentra con el segundo tren? Para encontrar este número bastaría que yo encontrara el *tiempo* que tarda la mosca en chocar con el otro tren, ya que si calculo ese tiempo, entonces, lo multiplico por 75 y tengo la distancia que recorrió. Ese tiempo *t* se calcula así:

$$75\,t = 100 - 50\,t \quad (*)$$

¿Por qué? Porque el término de la izquierda indica la distancia que recorre la mosca en un tiempo *t*, y el término de la derecha es la distancia que recorrió el segundo tren desde que salió a 100 kilómetros de la mosca y viajando a una velocidad de 50 km/h. Quiero encontrar el número *t* que haga que ambos se encuentren, y de allí la igualdad que figura en (*). Despejando en (*), se obtiene que 125 t = 100, por lo que uno deduce que t = 4/5 (de hora). Luego, para calcular la distancia que recorrió la mosca en 4/5 de hora, multiplico ese valor por 75 (que es la velocidad de la mosca) y obtengo: 75 x (4/5) = 60 kilómetros, y ésa es la distancia que recorrió la

Pero otra manera de pensar este problema es la siguiente: si uno calcula el tiempo que tardan los dos trenes en chocar entre sí,

---

mosca *la primera vez que se encuentra* con el segundo tren. Allí, instantáneamente da vuelta y arranca en sentido contrario. Ahora, quiero calcular cuánto recorre hasta encontrarse con el primer tren. Por lo tanto, igual que recién, me alcanzará con encontrar el tiempo que tiene que volar hasta tropezarse con el primer tren, e igualarlo con el tiempo que usa el primer tren hasta encontrarse con la mosca.

O sea, hay que encontrar el valor de *t* que hace que esta igualdad valga:

$$60 - 75\ t = 40 + 50\ t$$

¿Por qué? A la izquierda, estoy calculando la distancia que recorre la mosca desde el kilómetro 60 (donde se encontró con el segundo tren), a una velocidad de 75 km/h, hasta que se encuentra con el primer tren. Y en el término de la derecha, el número "40" indica los kilómetros que iba recorriendo el primer tren cuando la mosca se encontró con el segundo tren. Es que como la mosca había usado 4/5 de hora, entonces, en 4/5 de hora, el primer tren recorrió: (4/5) x 50 = 40 km. Entonces, de la igualdad (**) se deduce:

$$60 - 75\ t = 40 + 50\ t$$
$$20 = 125\ t$$
$$t = 4/25 = 4/5^2$$

Luego, la mosca, en tiempo $(4/5^2)$ recorrió: $(4/5^2) \times 75$.

Si uno sigue con este procedimiento, advierte que para calcular la distancia que recorrió la mosca hasta que los dos trenes chocan de frente, lo que puede hacer es sumar

$$75 \times [(4/5) + (4/5^2) + (4/5^3) + (4/5^4) \ldots + (4/5^n) + \ldots] = 75$$

Para todos aquellos que hayan tropezado alguna vez en sus vidas con series numéricas, basta con sumar la serie geométrica de razón 1/5, empezando desde el segundo término. De allí el resultado (75 kilómetros). Corolario: la mosca recorrió 75 kilómetros en el momento en el que *muere* aplastada entre los dos trenes.

eso indica el tiempo en el que la mosca estuvo volando entre uno y otro (tren). Es decir: me basta con saber cuánto tiempo pasó para que los dos trenes chocaran de frente, para saber el tiempo que la mosca pasó en el aire yendo y viniendo. Pero como los dos trenes marchan a 50 km/h, y salen a una distancia de 100 km entre uno y otro, en el momento que recorrieron 50 kilómetros (o sea, a mitad de camino) chocan inexorablemente. Y como la velocidad a la que circulan es de (justamente) 50 km/h, eso indica que en una hora recorrieron 50 kilómetros. Lo único que falta es que deduzca qué distancia recorrió la mosca en ¡una hora! Y eso es fácil de contestar: la mosca recorrió 75 kilómetros en una hora (ya que vuela a 75 km/h). Y eso termina por resolver el problema.[36]

Moraleja: Si uno arranca a pensar el problema de esta forma, nunca comprenderá por qué hay semejante historia alrededor de él. Pero como decía más arriba, justamente la historia de este problema está construida de los que —como yo— tratamos de sumar los "infinitos" segmentos que va recorriendo la mosca en cada pequeño tramo, en lugar de aproximarme/nos al problema, pensándolo en forma directa.

En eso consiste la belleza del pensamiento, la variedad y capacidad para encontrar nuevos caminos cuando éstos parecían agotados.

---

36. Hay una anécdota muy famosa (de dudosa veracidad) que indica que cuando le plantearon este problema al célebre matemático húngaro-norteamericano John von Neumann, el padre de la Teoría de Juegos y uno de los que participó en el Proyecto Manhattan que construyó las bombas atómicas arrojadas en Hiroshima y Nagasaki, Von Neumann contestó: "75 kilómetros". Su interlocutor lo miró y le dijo: "Es extraño que usted lo hubiera resuelto tan rápido, ya que la mayoría de la gente trata de calcular la suma de la serie". Von Neumann le respondió: "¿Por qué dice extraño? ¡Eso es exactamente lo que yo hice!".

♦♦♦

Solución a "Cien personas con sombreros"

Una manera de garantizar que se salve la mitad de las personas es ponerse de acuerdo de antemano en dividirse en parejas. Es decir, se conforman 50 parejas (ya que hay 100 personas en total).

Pero algo más: los integrantes de cada pareja tienen un rol asignado: uno es M (masculino) y el otro es F (femenino).[37]

Entonces, esta es la estrategia que le propongo:

M elige lo que tiene F
F elige lo contrario de lo que tiene M

Entonces, veamos lo que pasa en cada pareja:

- Si los dos (M y F) tienen el mismo color, entonces se salva M (porque elige lo que tiene F y él tiene lo mismo), pero F muere, porque elige lo contrario de M y F tiene lo mismo que M en este caso. Por lo tanto, sobrevive M que es el 50% de la pareja.
- Si los dos tienen distinto color, entonces M muere, porque dice lo que tiene F, mientras que F sobrevive, porque F tiene lo contrario de M y justamente F elige ese color.

Esta estrategia garantiza que se salva exactamente la mitad de la gente.

---

37. Elegí poner M por masculino y F por femenino, pero obviamente pude haber elegido cualquier otro par de letras u opciones.

Apéndice: Si uno lo hiciera para el caso más sencillo posible (con solamente dos personas), entonces hay que buscar la estrategia que garantice que una se salve y después generalizarlo a cualquier número (par), utilizando la misma idea pero multiplicada por la cantidad de parejas que sean necesarias (si hay en total 2.n personas, la estrategia elaborada más arriba salva a exactamente n de ellas).



Solución a "Rompecabezas"

La única gracia que tiene este problema es tratar de resolverlo uno. Encontrar o no la solución resulta irrelevante. Si quiere, puede leerla ahora, pero no se prive del placer de pensarlo en soledad. Igualmente, acá va.

Pongámonos de acuerdo en un par de hechos:

a) El número inicial de piezas (o bloques) es 5.000.
b) El número final de bloques es uno. Cuando ya esté armado todo queda un solo bloque (grande, pero uno).
c) Cada movida reduce el número de bloques libres en uno. Es decir, cada vez que ensamblo dos bloques, hay un bloque libre menos.

Dicho todo esto, piense conmigo lo siguiente: ni bien empiezo a armar el rompecabezas, mi primera jugada significa conectar dos bloques. Si originalmente había 5.000, ahora, hay 4.999. Y en el próximo paso, o en la próxima jugada, quedarán 4.998. Y así siguiendo.

¿Quiere leer nuevamente las preguntas que propone el problema? ¿No tiene ganas de pensar las respuestas por su cuenta, sin leer lo que sigue más abajo?

Ahora creo que estamos en condiciones de contestar las dos preguntas.

Por un lado, como hay 5.000 piezas, y cada jugada reduce en uno el número de bloques, eso significa que no se puede resolver en MENOS de 4.999 PASOS. Es que para ir teniendo cada vez menos bloques uno necesita ir ensamblándolos de a uno por vez. Y como en total había 5.000, y cada paso reduce en uno la cantidad que hay, no se puede hacer en menos de 4.999 pasos.

Ahora bien: ¿qué estrategia diseñar para que uno pueda armar el rompecabezas en esos 4.999 pasos?

Lo interesante, es que no importa qué estrategia uno diseñe, **todas** involucran 4.999 pasos. Así como no se puede hacer en menos, tampoco se puede hacer en más (salvo que uno arme y desarme constantemente, lo que descarto porque supongo que la idea es resolver el problema y no complicarlo).

Pero uno piensa que cada vez que armó algo no vuelve para atrás (o sea, no los desarma) entonces, **cualquier proceso** de armado que elija tiene exactamente 4.999 pasos. ¿No es raro esto, e interesante a la vez?

Y con esto último quedan contestadas las dos preguntas.

Tengo un pequeño agregado: ¿Y si en lugar de 5.000 piezas fueran 10.000? ¿Cuál sería el mínimo número de pasos y qué estrategia usar para el armado que involucre ese número?

Respuesta: como usted habrá advertido ya, el hecho de que sean 5.000 o 10.000 no interesa. En realidad, el número mínimo de pasos para armar el rompecabezas, es ahora de 9.999. Por otro lado, cualquier estrategia para resolverlo que involucre no volver para atrás requiere de exactamente esos 9.999 pasos.

Más en general aún: si uno tiene un rompecabezas con cualquier número de piezas, digamos *n* piezas, en donde *n* es un número cualquiera, la cantidad mínima de pasos (o jugadas) para armarlo es de (n–1). Incluso cualquier estrategia que uno elabore y que sirva para completarlo requiere de (n–1) pasos.

Por último: por supuesto que este problema no enseña a armar un rompecabezas. Tampoco me lo proponía. En todo caso, lo que dice es que cualquier estrategia que a usted le haya servido para armarlo es buena, en el sentido de que inexorablemente usted habrá usado el mínimo número posible de pasos para armarlo. Ahora bien, la pregunta que no puedo contestar, es si el tiempo que le llevó es el óptimo (o mínimo). Eso no lo puedo predecir pero, en definitiva, ¿qué importancia tiene?



Solución a "Estrategia para descubrir un número entre cien"

Si uno tratara de recordar los números a medida que los va escuchando, tropezaría con el problema que tendríamos todos los mortales: no podríamos. Son demasiados números. Puede que alguna vez lo pudiéramos hacer, pero sería ciertamente muy difícil.

Apelar a la memoria parece entonces un recurso pobre. Necesitaríamos encontrar algún dato que pudiera incluir a todos los números que vamos escuchando pero que, al mismo tiempo, luego de haberlos escuchado a todos (a los 99), sugiera o indique cuál es el que se quedó afuera.

Por ejemplo, un dato que *no varía*, es la suma de los primeros 100 números. De hecho,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100 = 5.050$$[38]

De manera tal que como la suma de todos los números es siempre 5.050, si yo pudiera ir sumando los números que escucho (y no me equivocara), cuando el señor me termine de decir los 99 que eligió, al resultado que yo obtendría le faltaría exactamente el número que no fue dicho para llegar a 5.050.

Por ejemplo, si el señor eligiera el 16 como número a omitir, cuando termine de decirme los restantes, no llegaría a 5.050 (para esto tendría que incluirlos a todos), sino que llegaría hasta (5.050 – 16) = 5.034.

No bien él termine de decir los números, yo habré hecho (mentalmente) la suma de todo lo que me dijo, y llegaría a 5.034. Todo lo que falta hacer es restar

$$(5.050 - 5.034) = 16,$$

y justamente el 16 es el número que eligió.

Moraleja: Esta estrategia resuelve el problema. Seguro que hay otras, pero más allá de eso, lo que me importa subrayar es que lo que primero hicimos fue descubrir qué valor (la suma) es la referencia a tomar que luego se ve alterada cada vez que le falta un sumando (el

---

38. La suma de los primeros *n* números naturales

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n) = (1/2) \times (n + 1) \times n$$

En el caso particular de que n = 100, entonces

$$1/2 \times (100 + 1) \times (100) = 1/2 \times 101 \times 100 = 101 \times 50 = 5.050$$

número que quedó afuera). Y de eso se trataba, de encontrar alguna constante que fuera sensible a la falta de un número.

Otra estrategia posible sería multiplicar todos los números que uno escucha. Eso también sería viable porque, en definitiva lo que uno tendría que hacer es:

- calcular el producto de los primeros 100 números;
- multiplicar todos los números que uno va escuchando;
- luego de multiplicar los 99 números que dice el señor que tenemos delante, uno tiene que dividir el número que obtuvo en la parte (a) por el que obtuvo en la parte (b). Ese número, es el que falta de la lista de 100.

Como usted advierte, este procedimiento *también* es conducente. El único inconveniente es que multiplicar es más difícil que sumar, y llevar la cuenta de lo que uno va escuchando, es muchísimo más difícil.

Aun así es una estrategia posible, no muy útil, pero posible. ¿Habrá otras? ¿Es capaz usted de buscarlas?



Solución a "Estrategia con monedas"

Voy a proponer una solución pero, como usted va a advertir inmediatamente, no es la única.

Los dos deciden hacer lo siguiente: "van a decir que al otro le salió lo mismo que le salió a ellos".

Es decir, si a uno le salió cara, cuando le pregunten qué le salió al otro, va a decir cara también. Y lo mismo con el otro.

En ese caso, analicemos la probabilidad de que acierten los dos. Para eso veamos, de todos los casos posibles, cuáles son los que les sirven para ganar.

Si a ambos les sale lo mismo, ganan. Si a ambos, les sale diferente, pierden.

Los posibles casos son:

Cara-Cara
Cara-Ceca
Ceca-Cara y
Ceca-Ceca

Ganan en dos (de los cuatro): Cara-Cara y Ceca-Ceca.

Y pierden en los dos restantes. Luego, aciertan en dos de cuatro. Entonces, ¡la probabilidad es ahora 1/2!

Y, por supuesto, esto mejora la probabilidad que tenían antes, que era de un 1/4.

Por lo tanto, a pesar de que no parecía posible, hay una estrategia que les permite incrementar las chances de acertar.

Una observación: hay otra estrategia que pueden elaborar a partir de la que propuse más arriba. ¿Quiere pensarla usted? Está directamente relacionada con la anterior.

Sigo yo: lo que podrían hacer, es decir *lo opuesto* de lo que le tocó a uno. Es decir, si a uno le sale cara, dice ceca. Y viceversa.

En ese caso, también tienen dos posibilidades sobre cuatro de acertar:

Cara-Ceca y Ceca-Cara.

Y también la probabilidad de acertar se incrementó a 1/2, que es —obviamente— mejor que 1/4, como había al principio.

Nota 1: Este problema me fue sugerido por el doctor Matías Graña, gran amigo y profesor también en la UBA.

Nota 2: Hay otra manera de ver que si no hay estrategia establecida la probabilidad es de 1/4.

Para calcular la probabilidad de que sucedan dos eventos independientes, es decir, que el resultado de uno no tenga ninguna relación con el otro, lo que se hace es multiplicar la probabilidad de que suceda cada uno de esos eventos por separado.

La probabilidad de que A acierte lo que tiene B es 1/2, porque A sabe lo que le salió a él, por lo que tiene una en dos posibilidades de acertar lo que sacó B (que pudo haber sido o bien cara o bien ceca). Luego, su probabilidad es 1/2.

De la misma forma, la probabilidad de que B acierte también es 1/2, ya que B sabe lo que él tiene. Adivinar lo que tiene A tiene 50% de chance de ser cierto. Luego, su probabilidad de acertar, es 1/2.

Dicho esto, la probabilidad de que acierten los dos es el producto de ambas probabilidades:

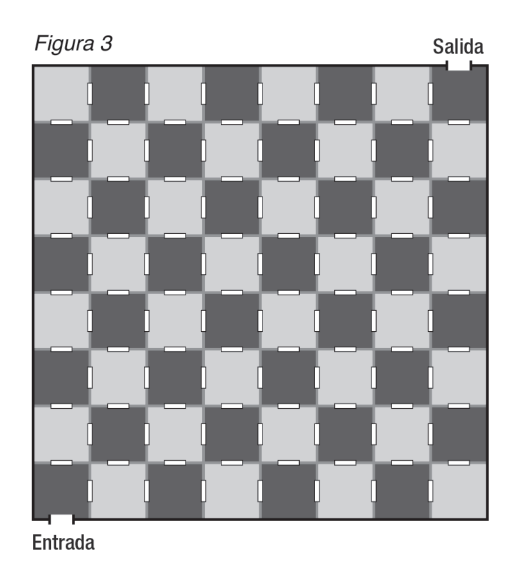
$$1/2 \times 1/2 = 1/4$$ [39]

39. Cuando Carlos D'Andrea terminó de leer esta historia, me escribió: "Me parece fascinante este resultado. Obviamente, este tipo de problemas no son los que pienso habitualmente, pero saber que algo tan simple como esa estrategia te cambia la probabilidad tan drásticamente es… es fascinante". Me pareció interesante compartir esto que me escribió Carlos con usted que está leyendo el libro. Si uno es capaz de generar ese tipo de reacción con una historia que provee la matemática, debería decir que la tarea está cumplida.

♦♦♦

Solución a "¿Se puede o no salir de un laberinto?"

Fíjese qué interesante cómo se puede contestar la pregunta sin necesidad de hacer o intentar todos los posibles recorridos. Antes de dar la respuesta definitiva, la/lo invito a que pinte las habitaciones en colores blanco y negro, alternados, como si fuera un tablero de ajedrez (ver Figura 3).



Una vez hecho esto, ¿por qué no intenta de nuevo pensar si se puede o no se puede?

Sigo yo. Es que ahora fíjese que cada vez que usted está en una habitación cualquiera y quiere salir por cualquiera de las puertas que lo habilitan, siempre cambia de color de habitación. Por lo tanto, no importa qué camino usted elija, va a alternar entre los dos diferentes colores.

Ahora bien, sígame con esta línea de razonamiento.

- Al entrar por la puerta que dice "entrada", uno se instala en una habitación de color negro.
- No importa qué dirección tome, inexorablemente pasará a una habitación de color blanco.
- A partir de allí, tampoco importa qué camino elija, volverá a una de color negro, y así siguiendo: uno va alternando de color a medida que pasa de una habitación a otra. Recuerde este hecho.
- Por otro lado, como hay 8 filas y 8 columnas, hay en total 64 habitaciones, una cantidad par.
- Pero como uno sabe que va alternando negras con blancas, como uno entra en una negra para recorrer todas las habitaciones, al ser un número par debería terminar en una habitación blanca.
- Como la última habitación (la que tiene la salida) es de color negro también, entonces, la pregunta del problema se contesta así: "no es posible cumplir con el recorrido que se pide".

En definitiva, con el solo hecho de haber pintado (imaginariamente) las paredes de dos colores distintos, uno puede concluir que el laberinto de habitaciones no puede ser recorrido pasando por todas ellas una sola vez.

¿No es interesante esta solución? No creo que sea la única (ni mucho menos), pero me gustó mucho pensar que una estrategia como la de pintarlas de distintos colores cooperó en forma tan decisiva para llegar a la respuesta.

♦♦♦

Solución a "Cinco torres inofensivas"

La solución a este problema se puede encontrar usando lo que se llama "El problema del palomar" o *Pigeonhole* (como se ve en el episodio 1 de *Matemática… ¿estás ahí?*, en las páginas 134-136). ¿Cómo hacer?

Fíjese en lo siguiente. El tablero tiene 100 lugares, ya que es de 10 x 10. Hay 10 filas y 10 columnas. Quiero convencerla/lo de que hay por lo menos una fila que tiene como mínimo cinco torres. ¿Por qué? ¿Podría ser que todas las filas tengan a lo sumo cuatro?

Si así fuera, entonces las 10 filas tendrían a lo sumo 4 torres cada una. Pero eso da un total de 40 torres (4 por fila a 10 filas implican 40 torres). Pero tanto usted como yo sabemos que hay que distribuir ¡41 torres! Entonces, la torre que falta ubicar tiene que estar en alguna fila. Esa fila tiene que contener por lo menos 5 torres.

Esa fila la llamo Fila 1.

Ahora, imaginariamente hago de cuenta que saqué la Fila 1. No sé cuántas torres hay en esta Fila 1 que excluyo, pero cuando la saco del tablero, no puede haber habido más de 10 torres. Claro, como hay 10 lugares en la fila, si la saco del tablero a lo sumo me llevé 10 de las 41 torres. Quedan en las filas restantes 31 (o más), pero no puede haber menos que 31.

Estas 31 torres están distribuidas en 9 filas ahora. Así como antes pude mostrar que en el tablero completo había al menos una fila con al menos 5 torres, ahora voy a probar que entre las 9 filas que quedaron tiene que haber alguna con 4 torres.

¿Por qué? (piense usted usando —si quiere— el mismo razonamiento que fue útil un poco antes). Es que si en todas hubiera nada más que 3 torres, en total habría 27 torres. Pero como tienen que haber 31 todavía, entonces tiene que haber al menos una de las filas que tiene 4 torres. La llamo Fila 2. La saco también.

Ahora quedan 8 filas, y ¿cuántas torres quedaron en el tablero como mínimo? Como hemos sacado dos filas en total (las que llamamos Filas 1 y 2) y en cada una de ellas pudo haber 10 torres, a lo sumo desaparecieron 20 torres. Como originalmente había 41, menos las 20 que pudimos haber excluido quedan por lo menos 21 torres.

De la misma forma que hice en los dos casos anteriores, quiero probar que tiene que haber al menos una fila que tenga 3 torres. ¿Por qué? (y uso ahora el mismo razonamiento de antes una vez más): si hubiera nada más que 2 torres por fila (quedan 8 filas), habría 16 torres. Pero todavía quedan 5 más (fíjese en el párrafo anterior: tiene que haber 21 torres). Por lo tanto, tiene que haber al menos una fila con 3 torres. A una de ellas la llamo Fila 3 y la saco también.

Hasta acá sacamos del tablero (imaginariamente):

- La Fila 1 con 5 torres (como mínimo).
- La Fila 2 con 4 torres (como mínimo).
- La Fila 3 con 3 torres (como mínimo).

Como antes, si hubiera habido 10 torres en cada fila, hemos excluido 30 torres. Tienen que quedar al menos 11 torres. Y 7 filas. Una vez más, quiero demostrar que tiene que haber al menos una que tiene 2 torres. Si hubiera 1 torre en cada fila, como hay 7 filas habría sólo 7 torres y en realidad tenemos 11 torres. Por lo

tanto, tiene que haber al menos una fila que tenga 2 torres. A esa Fila la llamo Fila 4 (tiene 2 torres como mínimo).

Y luego, como hice antes, excluyo la Fila 4. ¿Cuántas torres pudieron quedar? Como en total tenía 11, y saqué una fila más (en la que a lo sumo pudo haber 10 torres). Luego, tiene que quedar al menos 1 torre en las 6 filas que quedan.

Llamo Fila 5 a la fila que tiene al menos 1 torre. Y ahora sí, estoy en condiciones de probar lo que quería al principio.

¿Qué quería probar? Quería probar que hay *5 torres inofensivas,* o sea, que no se atacan las unas a las otras. ¿Cómo hacer?

Elijo la torre que está en la Fila 5.

Ahora voy a la Fila 4. Allí tiene que haber al menos 2 torres. Por lo tanto, una de esas dos torres está en una columna diferente que la torre que está en la Fila 5. Entonces, la torre de la Fila 5 y la que elijo de la Fila 4 están no sólo en filas distintas, sino también en columnas diferentes.

¿Se da cuenta de qué proceso estoy usando? Ahora, voy a la Fila 3 en donde sé que hay 3 torres (al menos). Al menos una de estas torres tiene que estar en una columna distinta que las que elegí en las filas 5 y 4. Elijo esa torre.

Ya tengo 3 torres en filas y columnas distintas (luego, inofensivas).

Voy a la Fila 2, que tiene por lo menos 4 torres, y por lo tanto tiene que haber alguna de ellas que esté en una columna distinta de las 3 que ya tengo. Luego, la que agregué (y ya tengo 4 torres) están en filas y columnas distintas.

Por último, elijo la Fila 1 en donde hay (por lo menos) 5 torres. Tiene que haber alguna que no esté en ninguna de las columnas en las que estaban las cuatro que ya tengo. La elijo… y con eso ¡termino de demostrar lo que quería!

Encontré 5 torres que están no sólo en distintas filas sino tam-

bién en distintas columnas. Luego, no se atacan entre sí, son inofensivas.

Espero que usted haya disfrutado del trayecto que usamos hasta encontrar la solución del problema.

Es muy poco probable que uno tenga que resolver una situación como la que planteé más arriba (¿quién en su sano juicio tendrá que encontrar cinco torres en un tablero no convencional de ajedrez que no se ataquen unas a otras? ¿Y para qué, además?). Pero lo interesante es que provee (o usa) un par de herramientas que ayudan a pensar:

- el problema del palomar (que ayuda a descubrir el número mínimo de torres que tiene que haber en al menos una de las filas);
- cómo iterar el mismo proceso en forma descendente, reduciendo las filas, reduciendo el número de torres hasta llegar a que tiene que haber al menos una torre en una de las filas que quedan.

Todo esto, entonces, no aporta nada concreto a la vida cotidiana, más que la posibilidad de haber aprendido a pensar en estrategias, que quizás no sean útiles para encontrar torres que no se ataquen en supuestos tableros de ajedrez, pero sí pueden servir para haber trazado un camino que servirá para resolver una situación real de la vida cotidiana.

CARTAS

Un mago adivina las cartas

Hay un mago que tiene en sus manos un mazo de cartas españolas, como las que sirven para jugar a la escoba de quince o al truco. Por lo tanto, están excluidos los números 8 y los números 9. De hecho, el número 12 (el rey) vale 10 puntos, el número 11 (el caballo) vale 9 puntos y el número 10 (la sota) vale 8 puntos.

El resto de las cartas tienen el valor que indica su número. Y, por último, para fijar las ideas, los cuatro palos de las cartas son oro, espada, copa y basto.

El mago, entonces, le ofrece a una persona que elija una carta cualquiera, sin que él (el mago) la pueda ver. Le pide entonces que haga las siguientes operaciones:

- Multiplique por 2 el número de la carta.
- Al resultado, súmele 1.
- A lo que obtiene, lo multiplica por 5.
- Por último, si la carta que había elegido es de oro, súmele 4. Si es de espada, súmele 3. Si es de basto, súmele 2, y si es de copa, súmele 1.

Con esos datos, el mago le pide a la persona que le diga qué número le dio.

La respuesta que obtiene es, digamos, 39.

El mago piensa un instante y replica: “Entonces, la carta que usted eligió originalmente era el 3 de oro”.

¿Cómo hizo?

(La respuesta, en la página 165)

¿Cuántas combinaciones de cinco cartas se pueden extraer de un mazo que tiene 52?

Cuando uno juega a las cartas, a cualquier juego, se expone fuertemente al azar (si todo funciona en forma honesta). Ahora bien, juegue al juego que jugase, una vez que uno tiene las cartas en la mano ya no importa en qué orden le fueron entregadas. Es decir, el orden en el que uno sostiene las cartas en la mano no tiene incidencia en el juego.

Dicho esto, supongamos que uno estuviera por jugar con un mazo de 52 cartas, y cada participante juega con 5 cartas. Entonces, ¿cuántas posibles manos de 5 cartas nos pueden tocar?

Justamente, como el orden de las cartas no tiene importancia, eso va a ser un dato importante al hacer el cálculo.

Por un momento, quiero que me acompañe a que hagamos de cuenta que el orden SÍ importa.[40] En ese caso, ¿cuántas manos posibles de cinco cartas pueden resultar?

Analícelo conmigo: para la primera carta hay 52 posibilidades (como todavía no salió ninguna carta, me puede tocar cualquie-

---

40. Por supuesto, el orden en el que uno va recibiendo las cartas es irrelevante en el momento de jugar. Sin embargo, para empezar a contar los casos posibles, es preferible hacer de cuenta de que el orden importa, y después analizar cuántos casos de más contamos para ver cómo eliminarlos. En definitiva, contar mal al principio nos va a ayudar a contar bien un poco más adelante.

ra). A los efectos de que se entienda mejor, voy a poner un ejemplo. Supongamos que la carta que tengo ahora en la mano es un as de corazón.

¿Cuántas posibilidades hay para elegir la segunda? Como en el mazo quedan 51 cartas, hay 51 posibilidades para la segunda. Me puede tocar cualquiera de las otras 51.

Sin embargo, si en lugar de tener en la mano el as de corazón, tuviera el rey de corazón, ¿cuántas posibilidades habría para la segunda carta? Respuesta: una vez más, habría 51 cartas posibles.

Es decir (y es importante entender esto): "para cada una de las 52 elecciones posibles de la primera carta, hay 51 posibilidades para la segunda". Por lo tanto, en total hay:

$$52 \times 51 = 2.652$$

formas de tener dos cartas en la mano (para cada una de las posibles 52 que pueden salir primero, tengo que multiplicar por las 51 que me pueden tocar después). Por supuesto, estoy considerando el caso en el que importa el orden. O sea, no es lo mismo que yo haya recibido primero el 7 de corazón y después el 3 de trébol que tener primero el 3 de trébol y luego el 7 de corazón. A los efectos de lo que me interesa contar, son dos casos distintos.

Ahora bien, ¿cuántas posibilidades quedan para la tercera carta? (Aquí convendría que usted se detuviera y empezara a pensar cómo contestar esta pregunta sin mi ayuda. Por supuesto, usted puede leer lo que sigue, pero se priva de la oportunidad de pensar en soledad.)

Sigo: quedan 50 cartas, por lo que al número posible que tenía antes (52 x 51) ahora tengo que multiplicarlo por 50 (porque

para cada caso posible de los 52 x 51 que conté antes, tengo 50 posibilidades de agregarle una tercera carta).

Luego, hay

$$52 \times 51 \times 50 = 132.600$$

maneras de tener tres cartas en la mano (donde TODAVÍA importa el orden).

Como usted se da cuenta, es fácil seguir con el procedimiento. Ahora, para tener cuatro cartas (en orden) hay:

$$52 \times 51 \times 50 \times 49 = 6.497.400$$

formas, y por último para obtener una quinta carta las formas son:

$$52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 = 311.875.200$$

Esto significa que hay más de 311 millones de formas de recibir cinco cartas —en orden— de un mazo de 52.

Pero ahora quiero hacer bien la cuenta. Es decir, hasta recién estábamos tomándonos una licencia que hacía que el problema no fuera cierto. O sea, estoy cometiendo un error (a sabiendas, pero error al fin), y es que estoy contando todos estos casos como si el orden tuviera importancia, y usted tanto como yo, sabemos que eso no es cierto.

Ahora bien, ¿cómo eliminar el error? Es decir, como usted se da cuenta, estamos contando muchas veces la misma mano. Es decir, si uno tiene el 5 de corazón, el 3 de trébol, el 4 de pique, el 7 de pique y el rey de diamante, una vez que uno tiene las cartas en su poder, es indistinto el orden en el que las recibió. Por lo

tanto, lo que uno tendría que hacer es averiguar cuántas veces uno está contando la misma mano.

Este es otro dato muy importante: no avance si siente que no entendió lo que dice en el último párrafo. Lo escribo de otra manera: de la forma en la que yo conté las posibilidades de tener esas cinco cartas, el orden era importante. Por eso, lo que tenemos que hacer para evitar contar tantas veces la misma mano es poder deducir de cuántas formas las pudo haber obtenido.

Es decir, una vez que uno ya tiene las cartas en su poder, ¿de cuántas formas pudieron haber llegado hasta mí?

Piénselo usted por las suyas. Créame que vale la pena. Es un ejercicio interesante para la mente. Le propongo que lo reduzca a casos más chicos, con menos cartas. Por ejemplo, si hubiera nada más que dos cartas. ¿Cuántas posibilidades habría? Si las cartas fueran 10 de pique y rey de corazón, en ese caso, uno podría haberlas recibido así:

- primero el 10 de pique y luego el rey de corazón. O bien,
- primero el rey de corazón y luego el 10 de pique.

O sea, hay dos formas posibles.

Si fueran tres cartas, digamos 10 de pique, rey de corazón y 5 de trébol, en ese caso habría… (contémoslas juntos):

- 10 de pique, rey de corazón y 5 de trébol
- 10 de pique, 5 de trébol y rey de corazón
- rey de corazón, 10 de pique y 5 de trébol
- rey de corazón, 5 de trébol y 10 de pique
- 5 de trébol, 10 de pique y rey de corazón
- 5 de trébol, rey de corazón y 10 de pique

Es decir, en total, hay seis formas posibles. ¿Cómo podría hacer para contar todas estas posibilidades sin tener que hacer una lista con ellas?

Uno podría pensar así: para la primera carta hay tres posibilidades. Una vez elegida la primera, para la segunda quedan dos posibles cartas. Luego, hay en total

$$3 \times 2 = 6$$

posibilidades.

Y, por último, la tercera carta queda ya determinada porque es la única que no elegí hasta acá.

Entonces, como se ve, de esta forma aparecen $3 \times 2 = 6$ posibles formas, que es lo que estaba buscando.

Hagámoslo ahora con 4 cartas. Entonces, para la primera hay 4 posibilidades. Para la segunda hay 3. Luego en total (hasta acá) hay

$$4 \times 3 \ (= 12) \text{ casos}$$

Para la tercera, hay ahora sólo 2 posibilidades. O sea,

$$4 \times 3 \times 2 \ (= 24)$$

Y, por último, la cuarta carta queda ya determinada, por lo que en total hay $4 \times 3 \times 2 = 24$ casos posibles.

Y ahora sí, puedo analizar el caso que me interesaba originalmente, o sea, cuando uno tiene cinco cartas.

Cinco para la primera, cuatro para la segunda, tres para la tercera, dos para la cuarta y la última queda determinada por las anteriores. En total:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Moraleja: Hay 120 maneras de haber recibido las 5 cartas. O sea, 120 posibles órdenes distintos de haberlas recibido.

En consecuencia, al quitar el orden de recepción de las cartas, estamos contando 120 veces cada mano.

Por lo tanto, el total posible de casos hay que dividirlo por 120.

Y eso se hace así.

Todos los casos posibles eran: 52 x 51 x 50 x 49 x 48 = 311.875.200.

Ahora, divido este número por 120: 311.875.200/120 = 2.598.960.[41]

Y esto, justamente, concluye el problema. Hemos logrado responder la pregunta original. Se trataba de poder calcular cuántas posibles manos de cinco cartas puede uno recibir de un mazo de 52, por ejemplo, si uno está por jugar al póker.

En ese caso, la respuesta es: 2.598.960 manos posibles.

Ahora lo dejo a usted para que siga jugando, pero antes le agrego una pregunta más: ¿cuántas manos posibles contienen a los cuatro ases?

(La respuesta, en la página 167)

---

41. El número 2.598.960, que se obtiene de dividir 311.875.200 por 120, es uno de los números a los que se llama COMBINATORIOS y resulta de hacer la siguiente operación:

52!/((52-5)!5!) = 52!/47!5! y la notación que se usa es:

$$\binom{52}{5}$$

¿Cuántas formas hay de mezclar ese mismo mazo?

Recién dedujimos que hay casi 2.600.000 manos posibles de cinco cartas entre un mazo de 52. Quiero cambiar la pregunta ahora: ¿y si uno quiere contar de cuántas maneras diferentes se puede mezclar el mazo?

Es decir, cuando uno va a jugar a las cartas con un mazo de 52 naipes, ¿de cuántas formas posibles pueden quedar distribuidas las cartas?

Una observación: en el ejemplo en donde contábamos el número posible de manos de cinco cartas que se pueden obtener entre un total de 52, el orden era irrelevante; en el caso que ahora queremos resolver, el orden SÍ importa, ¡y mucho! De manera tal que se trata de contar de cuántas formas posibles se puede mezclar un mazo de 52 cartas.

(La respuesta, en la página 168)

Usted, ¿sabe jugar al póker? (No se preocupe, no le hace falta)

Uno está jugando al póker (no se preocupe si no conoce las reglas; yo tampoco). De todas formas, de un mazo de 52 cartas se reparten cinco por jugador. ¿Cuántas formas hay para elegir esas cinco cartas?[42]

De acuerdo con lo que escribí anteriormente en el problema de páginas anteriores ya sabemos que hay

$$\binom{52}{5}$$

$$= 2.598.960 \text{ maneras}$$

Ahora, quiero hacer (y tratar de contestar) algunas preguntas:

- ¿Cuántas escaleras reales "máximas" hay? (llamo así a la escalera real de 10, J, Q, K y el as de un mismo palo). En este caso, no hay mucho para pensar: como hay cuatro palos (corazón, diamante, pique y trébol) hay solamente cuatro formas de obtener esa escalera real.

42. En realidad, uno puede deshacerse de algunas cartas y recibir otras al jugar al póker, pero lo que quiero contar son las distintas combinaciones de cinco naipes que uno puede tener en una mano.

- ¿Cuál es la probabilidad de tener esa escalera real? En este caso, como hay 2.598.960 formas de tener cinco cartas en la mano, pero sólo cuatro de ellas corresponden a escaleras reales, la probabilidad entonces se calcula así: 4/2.598.960 = (aprox.) 0,00000154. Como se advierte, la probabilidad es muy baja. Dicho de otra manera, si uno va a apostar hay 649.739 chances contra 1 de que aparezca la escalera real (y este número se obtiene dividiendo 2.598.960/4 = 649.740. Luego, en sólo una de estas posibilidades hay esa escalera real).
- Contemos ahora el número total de escaleras reales que se pueden obtener. Una escalera real (pero no "máxima") consiste en tener cinco cartas consecutivas del mismo palo. Por ejemplo, as, 2, 3, 4 y 5 de pique, o 6, 7, 8, 9 y 10 de corazón. Elijamos un palo cualquiera, ¿cuántas escaleras reales posibles hay? Contémoslas juntos. La que empieza en un as (as, 2, 3, 4 y 5), la que empieza en un 2 (2, 3, 4, 5 y 6), la que empieza en 3, etc. La última, es la que llamo escalera real máxima (la que empieza en 10: 10, J, Q, K y as). Como hay en total 10 escaleras por palo y hay cuatro palos, se tienen 40 posibles escaleras (incluyendo las escaleras reales). Si uno no quiere incluir las máximas, entonces hay 36.
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar una escalera real cualquiera? Como antes, lo que hay que hacer es dividir las 36 potenciales escaleras, por 2.598.960. En este caso, el número que resulta es (aprox.): 0,0000139, o sea, hay una cada 71.942 manos.
- ¿Y qué pasa si uno quiere contar las escaleras comunes, en las que las cartas no tengan que ser todas del mismo palo? Por ejemplo, podría tener un as de pique, un dos de

trébol, un tres de trébol, un cuatro de corazón y un cinco de diamantes. Como indiqué más arriba, hay 10 formas posibles de formar escaleras. Cada una de las cinco cartas que aparece en la escalera puede ser de cualquier palo. O sea, hay cuatro posibilidades para la primera carta, cuatro para la segunda, tercera, cuarta y quinta. Y como uno puede combinar todas estas de la forma que quiera, hay $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1.024$. Pero en total, como hay diez variantes posibles de escalera, entonces hay que multiplicar por 10, y se tienen $10 \times 1.024 = 10.240$ posibles escaleras no necesariamente del mismo palo.[43]

- Para terminar el análisis de las escaleras, si uno quiere averiguar la probabilidad de tener una escalera cualquiera (incluyendo las reales y máximas reales), lo que puede hacer es dividir las 10.240 posibles por 2.598.960, y obtiene 0,00394004 o lo que es lo mismo que decir que hay una cada 254 manos.
- ¿Cuántas formas hay de tener un póker en la mano? Contemos cuántas formas hay. Se trata de contar de cuántas formas posibles se pueden tener las cuatro cartas del mismo número. En principio, la/lo invito a elegir póker de un cierto número cualquiera; digamos, un póker de 4. Entonces, ¿de cuántas formas se puede tener un póker de 4? Piénselo por un instante, pero va a advertir muy rápido que lo único que puede variar es la quinta carta. O sea, quedan $(52 - 4) = 48$ cartas para elegir. Es decir, uno tiene

43. Si bien no son necesariamente todas del mismo palo, las que lo son, están incluidas. Por lo tanto, si uno quisiera excluirlas explícitamente, lo que uno podría hacer es restar las reales y las que son todas del mismo palo y listo.

48 formas de tener un póker de 4. Pero también hay 48 formas de tener un póker de 6 o de 3, o de cualquiera. O sea, para cada número que uno elija para tener un póker (y hay 13 posibles), cada uno de ellos puede combinarse con 48 cartas distintas. En definitiva, hay 13 x 48 = 624 formas diferentes de obtener póker en la mano.

- ¿Cuál es la probabilidad de tener un póker? Este número resulta de dividir 624 por 2.598.960, que es igual (aproximadamente) a 0,00024. En consecuencia, si va a apostar, las chances son de 4.164 a 1 (si uno divide 2.598.960 por 624, obtiene 4.165. Luego, de cada 4.165 posibles manos, hay solamente una que contiene un póker).
- ¿Cuántas formas hay de tener full? (tres de un número y dos de otro entre las cinco cartas). Empiezo contando cuántos posibles pares hay. Como hay 13 posibles cartas, hay 13 posibles formas de tener pares: dos ases, dos números dos, dos números tres, dos números cuatro, dos reyes, etc. Sin embargo, hay

$$\binom{4}{2}$$

= 6 formas de elegir el par entre los cuatro posibles palos: (trébol, corazón), (trébol, pique), (trébol, diamante), (corazón, pique), (corazón, diamante) y (pique, diamante) (&). Luego hay 13 x 6 = 78 (*) formas de elegir el par. Contemos ahora los triples (o ternas o piernas). Hay 12 posibles números (porque el que integra el par no puede ser elegido). Pero hay $\binom{4}{3}$= 4 formas de elegir los tres palos que intervienen en la terna: (trébol, corazón, diamante),

(trébol, corazón, pique), (trébol, diamante, pique) y (corazón, diamante, pique). Por otro lado, como hay 12 formas de elegir el número (ya que el que elegimos para el par no se puede volver a usar), se tienen: 12 x 4 = 48 (**) posibles triples. Juntando toda esta información (la que figura en (*) y (**)), hay 78 x 48 = 3.744 formas de tener un full.

- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un full? Todo lo que hay que hacer, es dividir 3.744/2.598.960 = 0,0014 (aprox.). Es decir, 0,14% de las veces uno debería obtener un full. Y para completar, las chances son 693 a 1.
- ¿Cuántas formas posibles hay de tener color? Es decir, ¿de cuántas formas posibles uno puede tener las cinco cartas del mismo palo? Hay $\binom{13}{5}$ = 1.287 formas de tener cinco cartas de un cierto palo, pero como hay cuatro palos distintos, hay 4 x (1.287) = 5.148 formas de obtener cinco cartas del mismo palo. De todas formas, de éstas uno quiere restar las 40 que corresponden a las escaleras (incluidas las reales). Luego, en total, hay 5.148 – 40 = 5.108 formas posibles de tener una mano con las cinco cartas del mismo palo.
- ¿Cuál es, entonces, la probabilidad de sacar color en una mano de póker —que no sea una escalera—? Basta dividir 5.108/2.598.960 = (aprox.) 0,0020, es decir, 1 en 500 posibilidades.
- ¿Cuántas formas hay de obtener escaleras comunes? (o sea, escaleras en donde las cinco cartas son consecutivas pero no necesariamente del mismo palo). Para contestar esta pregunta, fíjese que si uno elige la carta más alta (o la más baja), el resto queda automáticamente determinado. Por ejemplo, si la carta más alta es un 7, entonces las otras cuatro tienen que ser 6, 5, 4 y 3. Lo mismo si es un 10 la

más alta. Las otras tienen que ser 9, 8, 7 y 6. La única excepción es si la carta más alta es un as, en cuyo caso, las otras cuatro son K, Q, J y 10. ¿De cuántas formas se puede elegir el número más alto? De 10 maneras. ¿Por qué? Porque la carta más alta no puede ser ni un 4 ni un 3 ni un 2 porque no alcanzan las cartas para abajo. Luego, en total hay 10 formas de elegir la carta más alta. Pero esta carta puede ser de cualquier palo, y como hay cuatro palos distintos, uno puede decir que hay 4 posibles palos para la primera carta, 4 para la segunda, 4 para la tercera, para la cuarta y para la quinta. En total, hay 4 x 4 x 4 x 4 x 4 = 4^5 = 1.024 de elegir los palos. Y hay 10 formas de elegir la primera carta. Luego, en total, hay 10 x 1.024 = 10.240 formas de elegir una escalera de todos los posibles palos. Pero como yo quiero excluir las escaleras que estén formadas por cartas todas del mismo palo (que eran 40) en total hay 10.200.

- ¿Cuál es la probabilidad, entonces, de obtener una de estas escaleras comunes? La probabilidad se calcula dividiendo 10.200/2.598.960 = (aprox.) 0,0039, es decir, 1 en 255 manos.
- ¿Cuántas formas hay de obtener tres cartas del mismo número? (lo que nosotros llamamos una *pierna*). Por un lado, hay que elegir cuál de los números será el que aparezca tres veces. Hay 13 números posibles (del as hasta el rey o K). Pero de cada uno hay cuatro formas de elegir los palos, como se ve en el caso de cuántas formas hay de tener un póker en la mano. O sea, la pierna se puede elegir de 13 x 4 = 52 formas. Ahora quedan dos cartas más para elegir. Como en total hay 52 cartas y hay cuatro que quedan excluidas (las tres de la pierna más la otra carta con el mismo número que no podemos elegir porque si

no, sería un póker). O sea, hay que elegir dos cartas entre las 52 – 4 = 48 (*) restantes. Una vez que elijo una de esas 48, hay tres que no puedo elegir (iguales a la carta que elegí). Por ejemplo, si elijo un 7 de corazón, entonces no puedo elegir ninguno de los tres restantes 7 (el de pique, trébol o diamante). En consecuencia, quedan 44 cartas para elegir la quinta que me hace falta. Pareciera que en principio hay 48 x 44 = 2.112 posibilidades para la cuarta y quinta carta, pero en realidad el orden en el que las elija no interesa, o sea, que elegir el 7 de corazón y el 4 de trébol es igual que si eligiera el 4 de trébol y el 7 de corazón. O sea, estoy contando dos veces cada par si cuento 2.112. Para evitar este problema, lo que hay que hacer es dividir por 2 ese número, y se obtiene: 2.112/2 = 1.056 (**). En definitiva, ahora tengo todos los datos: para poder calcular cuántas posibles piernas es posible recibir hay que multiplicar las 52 formas que aparecen en (*) por las 1.056 (que aparecen en (**)). Es decir: 52 x 1.056 = 54.912 es el número total de piernas posibles.

- ¿Cuál es la probabilidad de conseguir una pierna? Sólo hay que dividir 54.912/2.598.960 = (aprox.) 0,021129, que representa (aproximadamente también) un 2,11% de posibilidades. Por lo tanto, como 2.598.960/54.912 es igual a 47,33, entonces, las chances de que aparezca una pierna son 46 a 1 (aproximadamente).
- ¿Cuántas formas hay de obtener dos pares de cartas iguales? Para este cálculo necesito que me siga con algunas reflexiones. En principio, hay que elegir los dos números que formarán el par. ¿De cuántas formas se puede hacer esto? Hay 13 números de donde elegir dos, y la manera de contar todas las formas de hacerlo es el número combinatorio

$$\binom{13}{2}$$

$$= 78$$

Quiero hacer notar acá que hay que excluir el caso en el que los cuatro sean iguales porque, aunque técnicamente serían dos pares, entrarían en la categoría de ser un póker y no dos pares. Por otro lado, cada par tiene seis posibles elecciones de dos palos (tal como vimos en (&) en el punto sobre cuántas formas hay de tener un full). Pero como cada una de las seis elecciones de palos para el primer número se pueden combinar con las seis elecciones de palos para el segundo número, se tiene, en general, 36 casos posibles.
Moraleja: Si se tratara SOLAMENTE de elegir dos pares, o sea, si no hubiera una quinta carta, entonces hay 78 x 6 x 6 = 78 x 36 = 2.808 posibilidades. Pero todavía falta elegir la última carta. Lo que hay que calcular es ¿cuántas cartas posibles hay en el mazo que puedan acompañar a los dos pares? Tal como usted intuye, de las 52 cartas hay que eliminar las ocho que integran potencialmente los dos pares, por lo que quedan en total 52 – 8 = 44 cartas. Para terminar, entonces, hay 2.808 x 44 = 123.552 posibles maneras de elegir dos pares entre las 52 cartas.

- ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos pares entre las cinco cartas? Como en todos los otros casos, todo lo que hay que hacer es dividir 123.552/2.598.960 = 0,04754 (aproximadamente), o sea un 4,75% de las veces. Por último, ¿cuántas formas posibles hay de tener en una mano de cinco cartas exactamente un par? Hay 13 números posibles, pero tal como vimos hay seis formas de elegir cada

par. O sea, 13 x 6 = 78. Ahora hay que elegir tres cartas más, entre las 48 que quedan. Normalmente, uno tendería a utilizar el combinatorio

$$\binom{13}{2}$$

para seleccionar esas tres cartas. Pero si lo hiciera, cometería un error (¿cuál?). Es que uno no puede elegir tres cartas cualesquiera de las 48 que quedan porque en particular incluiría ternas, con lo cual en lugar de tener EXACTAMENTE un par, tendría un full, o bien, podría incluir otro par, en cuyo caso no estaría contando lo que quiere. Por eso es que elegir el combinatorio $\binom{48}{3}$ cuenta muchos casos de más. Para hacerlo correctamente, lo que uno tiene, una vez elegido el número con el que formará el par, es que quedan 12 cartas (o números). De esos 12, uno quiere elegir tres números distintos (justamente, para evitar otros pares y los potenciales full). Luego, lo que hay que hacer es usar el combinatorio $\binom{12}{3} = 220$ que cuenta cuántas formas diferentes hay de seleccionar tres cartas distintas. Pero cada una de estas cartas puede ser elegida de un palo distinto. Y hay cuatro palos. Entonces, cada una de las tres cartas hay que contarla 4 veces. En definitiva, uno tiene 220 x 4 x 4 x 4 = 14.080. Este número cuenta la cantidad de tres cartas distintas que uno puede elegir de las 48 que quedan. Todavía hay que multiplicar estas 14.080 posibilidades por las 78 formas que había de elegir cada par. En definitiva, se

tiene 14.080 x 78 = 1.098.240. Finalmente, este número (1.098.240) cuenta el número de formas que hay de obtener exactamente un par entre cinco cartas elegidas de las 52 originales.

- ¿Cuál es la probabilidad de tener un par exactamente? Hay que dividir 1.098.240/2.598.960 = 0,42257 (aprox.), lo que implica que hay un poco más de un 42% de posibilidades de tener un par al repartir cinco cartas.

Olivia y la matemágica

Olivia Crotts vive en un pequeño pueblo en los Estados Unidos. Se llama Washington, pero no es el Washington capital que usted está acostumbrado a escuchar. No. Este pueblo, que no llega a los 14 mil habitantes, queda en Illinois, a unos 250 kilómetros al sudoeste de Chicago. Olivia tiene 14 años. Nació en China, pero ahora vive allí. Una noche, cenando con Dale, Laura y Gary, sus padres y tío, respectivamente, sacó un mazo de cartas y me dijo que me haría un juego que involucraba magia y matemática. Ella sabía cómo hacerlo pero no sabía por qué funcionaba, y por eso me propuso que lo pensáramos juntos. Y eso hicimos. Lo que sigue, entonces, es un poco de "matemágica". Acá va.

Primero voy a contar un ejemplo del juego y más adelante lo voy a proponer en general. Olivia mezcló bien las 52 cartas y me las entregó. Me dijo que eligiera (sin mostrárselas a ella) tres cartas cualesquiera, que no fueran figuras. Es decir, me pedía que obviara las J, las Q y las K ("caballeros o jacos", "damas" y "reyes"). O sea, tenía que elegir tres cartas cualesquiera que tuvieran algún número, incluido los ases, que representan al número 1.

Yo elegí un 6, un 7 y un 9.

El segundo paso consistía en que yo, mirando el número de cada carta, armara tres pilas de naipes encima de cada una de ellas, siguiendo estas reglas:

- Arriba del 6 debía poner 7 = (13 – 6) cartas. O sea, me pedía que eligiera siete naipes del mazo y los pusiera encima del 6. En total, en esa pila, quedaron ocho cartas, ya que incluyo al 6.
- Arriba del 7 debía poner 6 = (13 – 7) cartas. O sea, me pedía que eligiera seis naipes del mazo y los pusiera encima del 7. En total, en esa pila quedaron siete cartas, ya que incluyo al 7.
- Arriba del 9 debía poner 4 = (13 – 9) cartas. O sea, me pedía que eligiera cuatro naipes del mazo y los debía poner encima del 9. En total, en esa pila quedaron cinco cartas, ya que incluyo al 9.

En resumen, necesité usar ocho cartas para la primera pila, siete para la segunda y cinco para la tercera. En total, sumando las cartas de las tres pilas había (8 + 7 + 5) = 20 cartas.

Como en un mazo hay 52 cartas, quedaron sin usar 32. Me pidió que se las entregara. Hasta ese momento, ella sólo recibió las cartas que le di, sin contarlas ni mirar cuáles eran. Delante de mí, entonces, contó y separó diez cartas cualesquiera y dijo que no las necesitaba. Se quedó entonces con 22 cartas en la mano.

Me dijo que eligiera dos de las pilas y que sumara los números de las cartas que estaban abajo de todo. Yo elegí las pilas que contenían al 6 y al 9. Los sumé y me dio 15.

Allí sí, me pidió que le dijera el número que me había dado. Cuando le dije 15, ella tomó las cartas que tenía en la mano (las 22) y separó 15 naipes. Contó las cartas que le quedaban aún. Y

me dijo: el número que quedó abajo en la última pila era un ¡7!

Como efectivamente era un 7 me pidió entonces que yo dedujera cómo había hecho ella para descubrir este 7 y una vez que lo descubriera quería que pensáramos juntos por qué funciona.

Olivia y yo nos quedamos pensando no sólo por qué habían quedado justo siete cartas en ese ejemplo (que era el número que faltaba), sino por qué habría de servir en cualquier caso y cómo explicarlo. Ahora le toca a usted.

(Las respuestas, en la página 169)

Solución a "Un mago adivina las cartas"

Antes de pensar junto con usted la solución, observemos que si esta persona había elegido el 3 de oro, el resultado de hacer todas las operaciones lo llevó al número 39.

- Al multiplicarlo por 2, obtiene el número 6.
- Al sumarle 1, obtiene el número 7.
- Al multiplicarlo por 5, obtiene el 35.

Como eligió el 3 de oro, y a las cartas de oro debía sumarles 4, entonces $(35 + 4) = 39$. O sea, efectivamente, si hubiera elegido el 3 de oro, el resultado debió ser 39.

Ahora bien, ¿cómo hizo el mago para poder deducirlo al revés? Es decir, conociendo el número 39, ¿cómo hizo para volver para atrás?

Primera observación. Acompáñeme en esta reflexión. Usted es el mago y yo soy la persona que eligió la carta, digamos con el número X (que usted no conoce, todavía). Pero fíjese qué pasó con las operaciones que usted me pidió que hiciera (con el número X).

- Lo multipliqué por 2. Obtuve entonces $2 \times X$.
- Le sumé 1. Tenía entonces $(2 \times X + 1)$.
- Después, me pidió que lo multiplicara por 5.

Obtuve:

$$(2 \times X + 1) \times 5 = 10 \times X + 5 \quad (*)$$

que es un número múltiplo de 5.

¿Qué pasa cuando le sumo el número para indicar el palo que tenía la X?

Transformo el resultado en:

- Un múltiplo de 5 más 4, si la carta X era de oro.
- Un múltiplo de 5 más 3, si la carta X era de espada.
- Un múltiplo de 5 más 2, si la carta X era de basto.
- Un múltiplo de 5 más 1, si la carta X era de copa.

Ahora volvamos al número que yo le dije, 39. Como usted advierte,

$$39 = 35 + 4$$

Por lo tanto, es un múltiplo de 5 más 4. Luego, usted acaba de descubrir, que la carta X que yo elegí es de oro. No sabe todavía cuál es el valor de X, pero sí sabe, que es de oro.

Ahora bien. Al restarle los 4 que corresponden al palo, ahora usted tiene el número 35. Por lo tanto, si usted se fija en (*), sabe que en este caso:

$$10 \times X + 5 = 35 \quad (**)$$

Luego, se trata de calcular el valor de X en la igualdad (**).

En consecuencia,

$10 \times X = 35 - 5 = 30$, lo cual quiere decir que $X = 30/10 = 3$.

$$\boxed{X = 3}$$

Moraleja: La carta que yo había elegido fue el 3 de oro.

¿Se anima ahora a calcular conmigo qué carta elegí si el resultado de las operaciones fue 86?

Piénselo usted por su cuenta y si quiere, confronte acá abajo lo que le dio.

Primero, hay que ver de qué palo es la carta. Para eso, hay que ver que 86, se escribe como 85 (múltiplo de 5) + 1. Esto dice que la carta es de copa.

Una vez que uno tiene el número 85, ahora todo lo que queda por hacer, es despejar la letra X en la igualdad:

$$10 \times X + 5 = 85$$

$$10 \times X = 85 - 5 = 80, \text{ por lo que } X = 80/10 = 8.$$

En consecuencia, la carta elegida fue la sota de copa (ya que la sota, con la convención que habíamos hecho, vale 8 puntos).



Solución a "¿Cuántas combinaciones de cinco cartas…?"

Fíjese que de las cinco cartas que usted ya tiene que tener en la mano, 4 ya están determinadas: los cuatro ases. Y el mazo, que originalmente tiene 52 cartas, ahora tiene 48. Es decir, la *quinta* carta puede ser cualquiera de las 48 restantes. Por lo tanto, hay ¡48 maneras de tener los cuatro ases en la mano!

Si quiere calcular la probabilidad de que le toquen en suerte los cuatro ases, haga la siguiente cuenta:

48/2.598.960 = 0,000018469, que es casi 1 en 50.000.

¡Suerte!



Solución a "¿Cuántas formas hay de mezclar...?"

Como ahora sí importa el orden, entonces para la primera carta (la carta que va a estar arriba del mazo) hay 52 posibilidades. Para cada una de esas posibles elecciones de la primera carta hay 51 posibles para ocupar el segundo lugar. Luego, hasta allí tenemos

52 x 51 =

formas. Y tal como hicimos en el ejemplo anterior, uno sigue multiplicando en orden decreciente todos los números desde el 52 hasta el 1.

O sea, el resultado que buscamos es:

52 x 51 x 50 x 49 x 48 x 47 x 46 x 45....... x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Este número, tal como hemos visto en el episodio 1 de *Matemática... ¿estás ahí?*, se conoce con el nombre de "factorial de 52", y la notación matemática que se usa es 52!

O sea,

52 x 51 x 50 x 49 x 48 x 47....... x 4 x 3 x 2 x 1 = 52!

Pero acá me quiero detener un instante e invitarla/lo a pensar conmigo: este número, 52!, es un número muy muy grande. Tanto que es un número que se lo puede pensar así:

¡¡¡Un número 8 seguido de 67 (sesenta y siete) ceros!!!

Para escribirlo como corresponde, 52! es APROXIMADAMENTE 8×10^{67}, o sea, lo mismo, ¡¡¡un 8 seguido de 67 ceros!!!

Este número es tan grande que es muy muy muy poco probable que si uno mezcla las cartas en forma aleatoria, obtenga dos distribuciones iguales, aunque haya empezado a hacerlo cuando comenzó la humanidad y apareció el primer hombre arriba de la Tierra.

¿No le da la sensación de que sabemos muy poco de los números grandes que nos rodean? ¿Tenía usted idea de que esto era así?



Solución a "Olivia y la matemágica"

Escribo lo que pensamos juntos con Olivia. Veamos por qué funciona en el caso de las cartas que yo había elegido: un 6, un 7 y un 9.

Si usted lee lo que ella me pidió que hiciera, quedaron conformadas tres pilas. Cada pila tenía (respectivamente) ocho, siete y cinco cartas. ¿Cómo determinamos qué cantidad de cartas iría en cada pila? Revise lo que ella me pidió que hiciera y verá que:

- En la pila que tenía al número 6 abajo, quedaron (14 – 6) cartas. Sí: (14 – 6) cartas, porque si bien ella me pedía que pusiera (13 – 6) cartas arriba de ese 6, al incluir al 6, quedan (14 – 6). O sea, ocho cartas.
- En la pila que tenía al número 7 abajo —usando el mismo argumento— quedaron (14 – 7) cartas. O sea, siete naipes.
- Finalmente, en la pila que tenía al número 5 debajo de todo, quedaron (14 – 5) cartas. O sea, nueve naipes.

Por lo tanto, si sumamos las cartas que hay en las tres pilas, hay 8 + 7 + 5 = 20 cartas. Como en un mazo hay 52 cartas, yo le di a Olivia 32. Ella separó 10 (que no habría de usar) y se quedó con 22.

Acá, la/lo invito a que se detenga un instante. Note que este número 22 es justamente la suma de las tres cartas que figuran debajo de cada pila:

$$6 + 7 + 9 = 22$$

Luego, en el momento en que yo elija cualesquiera dos de esos números, los sume y se los haga conocer, todo lo que ella tiene que hacer es contar ese número de cartas, y las que le sobran en la mano representan al número que falta. ¿Por qué pasa esto?

Eso pasa porque yo usé 20 cartas, le di 32, ella separó 10 que no habría de usar, y se quedó con 22. Justamente 22 es la suma de las tres cartas que yo había separado. Luego, cuando yo elijo dos cualesquiera, las sumo y le digo el resultado, ella puede deducir inmediatamente (restando) cuál es la carta que falta, y eso resuelve el problema.

Uno podría preguntarse: ¿y en el caso general? Si los números

que elijo no son 6, 7 y 9, ¿funciona igual? La respuesta es que sí, y le pido que me acompañe y lo comprobamos juntos.

Voy a llamar **a**, **b** y **c** a los tres números de las cartas que elijo.

De acuerdo con las reglas que me planteó Olivia, uno descubre que:

- La pila que tiene a la carta **a** debajo de todo, tiene (14 – **a**) cartas en total.
- La pila que tiene a la carta **b** debajo de todo, tiene (14 – **b**) cartas en total.
- La pila que tiene a la carta **c** debajo de todo, tiene (14 – **c**) cartas en total.

Eso dice que el total de cartas entre las tres pilas es:

$$(14 - \mathbf{a}) + (14 - \mathbf{b}) + (14 - \mathbf{c}) = 42 - (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$$

Luego, como en un mazo hay 52 cartas y yo le tengo que entregar a Olivia las que no usé, resultan ser:

$$52 - (42 - (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})) = 10 + (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$$

Cuando Olivia cuenta 10 cartas y las retira, se queda entonces con

$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ cartas en la mano.

Y de aquí a la solución hay un solo paso. No bien ella me pide que yo elija dos de las cartas (digamos que elijo **a** y **c**), que las sume ($\mathbf{a} + \mathbf{c}$) y le diga el resultado, todo lo que ella tiene que

hacer es contar (**a** + **c**) cartas de las que tiene, y el número de cartas que le sobran es exactamente **b**.

En el caso particular del ejemplo que planteé más arriba, yo había elegido los números 6, 7 y 9. Por lo tanto, es como si le pusiéramos un valor a cada letra:

a = 6, **b** = 7 y **c** = 9

Ahora, si uno se quiere convencer de por qué funciona, basta con reemplazar cada letra por ese valor y listo.

Moraleja: Olivia sabía que en alguna parte estaba escondida la matemática que explicaba por qué funcionaba lo que ella hacía automáticamente. Lo que quería era sorprenderme con un truco que parecía de magia. O mejor dicho, de matemágica. Y no cedió en el intento hasta descubrir por qué. Hasta que lo logró.

AZAR
Y
PROBABILIDADES

Los dados y el azar

Quiero proponerle pensar algo muy específico de la Teoría de Probabilidades. Específico y muy útil.

"Si p es la probabilidad de que suceda un evento, entonces $(1 - p)$ es la probabilidad de que ese mismo evento no suceda."

¿Qué quiere decir esto? Lo que sucede es que si p es la probabilidad de que suceda algo, y llamo q a la probabilidad de que este mismo evento ***no*** suceda, entonces,

$$p + q = 1$$

ya que la probablidad de que el evento suceda o no suceda es 100%, es decir, 1.

De esto se deduce que

$$q = 1 - p$$

Es decir, si uno quiere calcular la probabilidad de que algo no suceda, lo que puede hacer es calcular la probabilidad de que sí pase y luego restar ese número del número uno.

Por ejemplo, si usted quisiera calcular la probabilidad de que

al tirar un dado no salga un as, lo que uno podría hacer es calcular la probabilidad de que sí salga un as (que resulta ser 1/6), y luego, restar este número del número 1:

$$1 - 1/6 = 5/6$$

Es decir, la probabilidad de que no salga un as al tirar un dado es 5/6.

Esta herramienta para calcular probabilidades es muy poderosa y la/lo invito a que la tenga en cuenta para resolver los dos problemas que siguen.

Problema 1

Supongamos que uno tiene cuatro dados en la mano. Los arroja sobre la mesa. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos un as?[44]

Problema 2

¿Cuántas veces es necesario tirar un par de dados de manera tal de que sea más probable que salga un par de ases de que NO salga? Es decir, ¿cuántas veces será necesario arrojar esos dos dados para que la probabilidad de que salgan dos ases sea mayor que 1/2?

Son dos problemas con distintos grados de complejidad, pero le sugiero que los piense y les dedique un rato antes de cotejar las

44. La palabra "as" está referida al número 1 en los dados (y también en las cartas o naipes).

soluciones. Vale mucho más la pena invertir el tiempo en pensar una solución (aunque uno no la consiga) que leerla y sacarse (supuestamente) una carga de encima.

(Las respuestas, en la página 198)

¿Qué es el azar?

Si yo le pidiera que definiera lo que significa el azar, ¿qué diría? No se apure en leer lo que sigue. Trate de pensar qué es lo que usted cree que es el azar. En todo caso, la/lo estoy invitando a reflexionar. Es una palabra muy conocida (y usada) por todos, pero no estoy tan seguro de que tengamos una buena definición de lo que es.

No pretendo replicar acá algo que se puede buscar en cualquier enciclopedia, diccionario o en Internet, pero sí quiero compartir algunas experiencias para mostrar cómo la percepción que tenemos los humanos de lo que es el azar no necesariamente es uniforme o universal.

Voy a empezar con un experimento que realizó el doctor Theodore P. Hill, profesor en el Instituto de Tecnología de Georgia.[45] Hill les pidió a los estudiantes de matemática de su curso que hicieran el siguiente trabajo en sus casas:

"Tomen una moneda y arrójenla al aire 200 (doscientas) veces. Anoten la sucesión de resultados que van obteniendo (en

45. La difusión pública y masiva de la experiencia la hizo Malcolm W. Browne, en un artículo que publicó el 4 de agosto de 1998 en el *New York Times*.

caras y cecas, obviamente). Sin embargo, si no tienen ganas de arrojar la moneda al aire, me alcanza con que simulen haberlo hecho y anoten lo que les parece que podría darles.”

No parecía una tarea muy difícil. Al día siguiente, los alumnos entregaron las hojas con las distintas sucesiones de caras y cecas que cada uno de ellos había obtenido. Hill los fue nombrando a uno por uno mientras leía el papel que le habían entregado y casi sin error podía detectar quién había hecho el experimento tirando efectivamente la moneda al aire 200 veces y quién no.

¿Cómo podía saberlo? Por supuesto, y antes de avanzar, está claro que cualquier sucesión que le fuera entregada ES una sucesión posible de 200 resultados posibles entre caras y cecas. Pero lo que sucede es que hay ciertos patrones que es muy probable que aparezcan al arrojar verdaderamente una moneda —que no son los que uno esperaría— y, por lo tanto, los alumnos que inventaban el resultado no los incluían. De esa forma, se estaban —casi— autoincriminando.

¿A qué me refiero? Yo voy a escribir acá abajo dos sucesiones de 100[46] tiradas: una la inventé yo.[47] La otra se corresponde a un experimento real. Usé números 1 para indicar cada vez que salía cara y 0 para indicar para indicar que había salido ceca. Acá van:

10001 10010 10101 10110 00101 11001 10010 01110 10010 00110 01111 01001 00110 10001 11001 00110 10100 10001 10110 11100

46. Elijo 100 tiradas en lugar de 200 simplemente por razones de espacio.

47. La idea de hacer esta presentación del problema les pertenece a Pablo Milrud y Pablo Coll. El crédito es para ellos.

10001 01100 01110 00110 00000 10111 10110 00100 00111 11001 10001 00000 01101 11101 11110 01101 11011 00010 01010 01111

Mírelos con detenimiento y decida cuál le parece que es la falsa. Antes de que yo escriba la respuesta, quiero escribir una explicación que dio Hill en ese mismo artículo: "La gente, en general, no tiene idea de lo que significa el azar. Por lo tanto, cuando tiene que inventar datos, lo hacen de acuerdo con su creencia o percepción. En consecuencia, como es tan fácil errar en lo que es azaroso, también me resulta fácil a mí descubrir quién se tomó el trabajo de hacer realmente el experimento, y quién, en su defecto, eligió imaginarlo".

¿Por qué? ¿Cómo sabía Hill cuál era cada una? ¿Le alcanzó a usted con mirar las dos secuencias que figuran más arriba para sacar alguna conclusión? Lo más probable es que no, pero ahora quiero usar las probabilidades para socorrerlo.

Una característica interesante (y muy utilizada en la vida) son las rachas. Es decir, muchos "ceros" seguidos o muchos "unos". Pensando en estas rachas, voy a contar cada racha que aparece en las dos sucesiones de más arriba. Por ejemplo, como la primera empieza con

10001 10010 10101 10110…

entonces, la sucesión de rachas empieza así:

13221111112…

ya que primero hay un "uno" solo, después le siguen "tres ceros", después "dos unos", y así siguiendo.

Luego, fíjese ahora en lo que resulta escribir las dos secuencias de rachas:

13221111121231132221231121322411212211332122111121
3212132

131123332611412314522316214152213123121124

Mirando ahora estas dos últimas tiras de números, ¿cuál le parece más factible de ser la verdadera y cuál la falsa?

Por ejemplo, la tira de abajo, contiene dos números 6 y dos números 5. Eso se corresponde a que en algún momento del proceso o bien salieron 6 caras o 6 cecas seguidas, y en otra oportunidad, 5 caras o 5 cecas seguidas. En cambio, en la primera tirada, eso no sucedió.

Justamente, estoy ahora en condiciones de preguntarle:

¿Usted diría que es alta o baja la probabilidad de que aparezcan o bien seis o más caras consecutivas o bien seis (o más) cecas consecutivas?

Intuyo su respuesta: "la probabilidad es bastante baja". Es muy posible que ni usted ni yo sepamos cómo explicar esto, pero la intuición que tenemos nos hace sospechar que seis o más caras o cecas consecutivas es poco probable que sucedan en 100 tiradas. ¿Está de acuerdo conmigo en esto? ¿O usted contestó algo diferente?

Lo notable es que la probabilidad de que esto suceda es mucho más alta de lo que uno supone. La teoría indica que la probabilidad de tener rachas de 5 en una tirada de 100 monedas es casi un 81%, rachas de 6 un 55% e incluso rachas de 7 son bastante probables: casi un 33% (una tercera parte de las veces).

La Teoría de Probabilidades muestra también que si uno tira

una moneda 354 veces, la probabilidad de que aparezcan 10 caras o 10 cecas seguidas es mayor que 1/2 (más que un 50% de posibilidades). Después de 512 tiradas, ese porcentaje aumenta a un 63%. Y, por último, si uno tirara una moneda 3.550 veces las posibilidades de que salgan 10 caras o 10 cecas seguidas es de un 99,9%. Más aún: con 3.550 tiradas hay un 50% de chance de que estas rachas de 10 seguidas (caras o cecas) se reproduzcan al menos 5 veces.

Por eso, cuando uno va a un casino, y le dicen que en cierta mesa donde se está jugando a la ruleta salió cinco o seis o siete veces seguidas el color negro, uno tiene la tendencia de intuir que ahora le toca al colorado. De hecho, cada tirada es independiente y, por lo tanto, lo que pasó antes es irrelevante. Sin embargo, con el afán de creer que uno es capaz de predecir el tal azar, somos capaces de no utilizar los métodos a nuestro alcance (la Teoría de Probabilidades, por ejemplo) para tomar una decisión más educada. Y piense que en un casino las ruletas funcionan muchas horas seguidas.

Otro ángulo para entender

Otra forma de mirar el problema es la siguiente, que propusieron Pablo Milrud y Pablo Coll. Tomemos las dos secuencias que figuran más arriba y mirémoslas desde otro lugar.

Mirando de a 1: Si tiro una moneda una sola vez, tengo dos resultados posibles, cara o ceca (o 1 y 0) y cada uno de los dos tiene la misma probabilidad de ocurrir: 1/2. Pensemos la serie de 100 tiradas como si fueran 100 tiradas individuales, una tras otra. En cada una de las 100 tiradas, la probabilidad de que salga

1 es idéntica a la probabilidad de que salga 0. Cabría esperar, entonces, que haya un número "parecido" de unos y ceros. (Pongo parecido entre comillas porque definir parecido en forma rigurosa me llevaría a análisis estadísticos complicados que no quiero abordar acá.)

0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1
0 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0

¿Cuántas veces aparece cada dígito?
0: aparece 49 veces.
1: aparece 51 veces.

Mirando de a 2: Si tiro la moneda dos veces, ya tengo cuatro resultados posibles: 00, 01, 10 y 11. Nuevamente, todos tienen la misma probabilidad de ocurrir: 1/4. Pensemos la serie de 100 tiradas como si fueran 50 secuencias de 2 tiradas cada una. Como hay 4 posibles resultados para estas secuencias de 2 tiradas, cabría entonces esperar que los 4 posibles resultados ocurran un número "parecido" de veces. Veamos:

00 10 11 10 00 00 10 01 11 01 11 01 01 10 11 00 00 00 10 00 11
11 00 00 10 11 11 01 00 11 00 10 11 00 11 00 11 01 10 10 00 11
01 11 11 11 01 10 10 00

¿Cuántas veces aparece cada posible secuencia de 2 tiradas?
00: aparece 15 veces.
01: aparece 08 veces.
10: aparece 11 veces.
11: aparece 16 veces.

Mirando de a 3: Al tirar la moneda tres veces, los resultados posibles son ocho: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 y 111. Todos tienen la misma probabilidad de ocurrir: 1/8. Pensando la serie de 100 tiradas como si fueran 33 secuencias de 3 tiradas cada una (más una suelta), y como hay 8 posibles resultados para estas secuencias de 3 tiradas, podemos nuevamente esperar que los 8 posibles resultados ocurran un número "parecido" de veces. Veamos:

001 011 100 000 100 111 011 101 011 011 000 000 100 011 110 000 101 111 010 011 001 011 001 100 110 110 100 011 011 111 110 110 100 0

¿Cuántas veces aparece cada posible secuencia de 3 tiradas?
000: aparece 4 veces.
001: aparece 3 veces.
010: aparece 1 veces.
011: aparece 9 veces.
100: aparece 6 veces.
101: aparece 2 veces.
110: aparece 5 veces.
111: aparece 3 veces.

Fíjese que estos resultados están cerca de las 4 y pico apariciones que debería tener en promedio cada una de las ocho posibles secuencias de tres ceros y unos.

Mirando de a 5: Las secuencias de cinco tiradas de monedas tienen 32 resultados posibles: 00000, 00001, 00010… hasta 11110 y 11111. Pensemos la serie de 100 tiradas como si fueran 20 secuencias de 5 tiradas cada una. Ya no pueden ocurrir las 32

secuencias porque tenemos 20 casilleros, pero es muy probable que aparezca alguna de las secuencias 00000 o 11111.

00101 11000 00100 11101 11010 11011 00000 01000 11110 00010 11110 10011 00101 10011 00110 11010 00110 11111 11011 01000

Hemos tenido “suerte” y tanto 00000 como 11111 aparecen una vez cada una. Observe que aun en el caso de que no hubiéramos tenido esta suerte, y que ninguno de los 20 casos hubiera resultado ser ni la 00000 ni la 11111, podría todavía ocurrir que dos casos vecinos sean 00111 11001, apareciendo entre ambas la secuencia 11111.

Conclusión: Lo que quiero mostrar con esta forma de observar el problema es que la ocurrencia de rachas de cinco ceros o cinco unos en una serie de 100 no es tan rara como uno podría pensar y que aun las de seis tampoco son raras. Hacer las cuentas para precisar las palabras “rara” y “parecido” es algo más técnico, pero la idea era sugerir por dónde se puede encarar este problema.

Por último, situaciones como las que figuran más arriba son las que usan aquellos que estudian a los que quieren fraguar datos impositivos o fraudes equivalentes. Quien tiene un ojo entrenado y sabe qué esperar es capaz de sospechar o detectar quiénes son los que entregan una declaración viciada y quienes no. Como siempre, la matemática tiene mucho para decir y enseñar al respecto.[48]

48. En el episodio 3 de *Matemática… ¿estás ahí?*, en la página 78-79, hay una historia que inspiró lo que se lee aquí.

Subnota: Fraguar el azar es algo extremadamente difícil. El tema merece una elaboración mayor, pero como dato muy interesante vaya una anécdota: aquellos que usan un iPod para escuchar música saben que la pueden reproducir en forma no programada. Es decir, el propio aparato elige al azar el orden de aparición de las canciones. El hecho es que muchos usuarios se quejaron ante Apple porque había una repetición de canciones de los mismos álbumes. Fue tal la presión que Steve Jobs y su gente tuvieron que modificar su función "random" de manera tal de que se pareciera más a lo que los humanos entendemos por azar. En algún sentido no podemos tolerar las rachas, que son de alta probabilidad en cualquier proceso que involucre muchas repeticiones.

Cuatro bolitas de colores

Se ponen cuatro bolitas dentro de una caja: una de color blanco, otra de color negro y dos bolitas de color rojo.

Después de mezclar un tiempo, un señor mete la mano en la caja y extrae dos de las cuatro bolitas. Sin que nadie pueda ver dice: de las dos bolitas que saqué hay una roja. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra bolita sea roja también?

Permítame hacerle una advertencia: el resultado correcto no es 1/3.

(La respuesta, en la página 201)

Medias blancas y negras

Siempre me motiva enfrentar problemas que atenten contra la intuición. Problemas cuya solución no sea trivial. Problemas que me obliguen a imaginar caminos que no son evidentes. En general, creo que son los problemas que educan, entrenan y preparan para la vida cotidiana.

Puede que uno no se tropiece con ninguno de ellos, pero seguro que los caminos que desarrolla para pensarlos terminan siendo útiles. Muchas veces me sorprende alguna idea que sé que no es mía, pero también sé que la tuve que usar en otro contexto, y ahora, en forma impensada, me sirve para otra situación.

Pero toda esta introducción la hago para poder presentar un problema en apariencia sencillo (en realidad, ES sencillo), pero que requiere de una mínima elaboración para llegar a la solución.

Acá va. En un cajón se tienen cuatro medias. No me refiero a pares de medias, sino a cuatro medias en total.

Las medias son o bien de color blanco (B) o de color negro (N). Lo que se sabe es que si uno mete la mano en el cajón y saca dos medias cualesquiera (sin mirar, claro está), la probabilidad de que las dos medias que uno extrajo sean las dos blancas es 1/2. O sea, un 50%.

La pregunta es: ¿Cuál es la probabilidad de sacar un par de medias negras?

No se apure. Dese tiempo y plantéese algunas alternativas. En general, la primera respuesta que a uno se le ocurre no es la correcta. Por eso es que la/lo invito a que se permita dudar y pensar.

Eso sí. Como siempre, lo único interesante es haber recorrido el camino en búsqueda de la solución. Llegar (o no) suele ser irrelevante.

(La respuesta, en la página 202*)*

Generalización del problema de las medias blancas y negras

Durante el año 2010, más precisamente el 26 de mayo de ese año, el diario argentino *Página/12* publicó en su contratapa el artículo que figura en este libro con el nombre "Medias blancas y negras".

El mismo día, el doctor Eduardo Cattani[49] me escribió un mail y me hizo algunas sugerencias respecto a esa nota. En particular, me sugirió que publicara también la generalización de ese mismo problema. Ahora cumplo con él.

En el problema original, que aparece más arriba, se tienen cuatro medias en total (entre blancas y negras). Demos una pequeña vuelta de tuerca, y supongamos que uno tiene en total 16 medias y el dato que se conoce es el mismo que en el problema original: la probabilidad de que al meter la mano en el cajón y sacar un par correcto (o bien blanco o bien negro) sea 1/2 (es decir, el 50% de las veces). La pregunta es: ¿cuántas medias blancas y negras tiene que haber entre las 16?

49. Eduardo Cattani es un matemático argentino (gran amigo y ex docente mío durante el curso de Análisis 1 en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA, que se dictó en el año 1965) me escribió un mail haciéndome algunas sugerencias. Eduardo reside hoy en Amherst y es profesor allí en la Universidad de Massachusetts.

Más aún, uno puede suponer que en lugar de 16 medias se tiene un número *k* de medias y evaluar qué sucede en ese caso.

Como siempre la/lo invito a que piense los problemas por su cuenta (que es, en definitiva, lo único que importa).

(Las respuestas, en la página 204)

¿Quién paga la comida?

Quiero plantear un problema que tiene una solución sorprendente.

Supongamos que usted y yo somos compañeros de trabajo. Todos los mediodías vamos al restaurante para almorzar y tiramos una moneda. El perdedor es quien paga la comida.

Después de haber ganado tres veces consecutivas, le propongo lo siguiente: en lugar de tirar una sola vez la moneda al aire y decidir quién paga, yo voy a tirar la moneda una vez y usted la tira dos veces y anotamos los resultados.

Si luego de las tres tiradas usted "sacó" más caras que yo, entonces gana usted. Si no, gano yo.

En principio, con el juego original, la probabilidad de que cada uno pague es la misma: 1/2.

O, si usted prefiere, los dos tenemos el mismo porcentaje de posibildades: 50%.

Con la forma que le propongo, ¿quién está mejor: usted o yo?

(La respuesta, en la página 208)

Un problema precioso sobre probabilidades

El problema que sigue es, sencillamente, espectacular.[50] Vale la pena pensarlo un rato.

Suponga que yo le doy todos los dígitos que hay (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) y le digo que los distribuya en los espacios que quedan en esta fila de números:

5 _ 383 _ 8 _ 2 _ 936 _5 _ 8 _ 203 _ 9 _ 3 _ 76

Por ejemplo, si los pusiera *ordenadamente*, se tendría el siguiente número

5 0 383 1 8 2 2 3 936 45 5 8 6 203 7 9 8 3 9 76

O sea, formamos un nuevo número:

50383182239364558620379839 76

50. Este problema lo vi por primera vez en un libro llamado *Mathematical quickies* cuyo autor es Charles Trigg. En cualquier caso, el crédito le corresponde a él y no a mí.

Por supuesto, si cambio la distribución de los diez dígitos (digamos que los pongo ahora en orden descendente) cambia el número que se obtiene:

5**9**383**87**2**6**936**5**5**4**8**3**203**2**9**1**3**0**76

Es decir, cada posible distribución de los dígitos genera un nuevo número.

Una pausa acá: por favor, no siga leyendo hasta comprender lo que escribí más arriba. Fíjese que hay 10 espacios vacíos en donde usted va a ubicar los 10 primeros dígitos de cualquier forma. Cada vez que lo haga, queda formado un nuevo número, siempre distinto.

Al cambiar el número, van a cambiar sus divisores. La pregunta es: si usted los distribuyera al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea divisible por 396?

Antes de avanzar, convénzase de que entendió lo que tiene que resolver.

Le propongo que lo pensemos (juntos) así: como cada número que se obtiene (al modificar la distribución de los dígitos) tendrá nuevos divisores, lo que le pregunto (más arriba) es: si usted arrojara los dígitos al azar, de manera que caigan en cualquier posición, ¿cuál es la probabilidad de que el número resultante sea divisible por 396?

Por ejemplo, la respuesta podría ser *cero*. O sea, no importa cuál sea la distribución que yo haga de los dígitos, nunca será divisible por 396. O podría ser que 396 dividiera a la mitad de los números que se pueden obtener. O a una tercera parte. En tal caso, la probabilidad sería 0 en el primer caso, 1/2 en el segundo, 1/3 en el tercero, y así.

Es decir, se trata de pensar cuántas posibilidades hay (sobre

el total de números que se pueden obtener) que resultan tener a 396 como factor o como divisor.

Ahora sí, la/lo dejo sola/solo.

(Las respuestas, en la página 209)

¿Es justa esta decisión?

Como siempre, todo lo que sirva para poner a prueba la intuición me genera una gran atracción. Cuando uno descubre que lo que cree que debería pasar no pasa, queda descolocado.

Puede que lo admita delante de otros o no. En todo caso, es irrelevante, pero la propuesta del siguiente problema tiene que ver con eso: piense usted cómo contestaría las preguntas que voy a plantear, pero hágalo en soledad. Disfrute del momento de duda (salvo que se le ocurran las respuestas inmediatamente).

Acá va el problema. Supongamos que usted y yo tenemos algo para dirimir. Por ejemplo, hay un par de entradas para ver una muy buena obra de teatro y queremos decidir quién de los dos puede ir con su pareja. No tenemos una moneda, pero hay una urna que contiene tres bolitas: dos son de color blanco (B) y una de color rojo (R).

Ahora, tengo las dos preguntas que le había anticipado. Yo le sugiero que usted meta la mano en la urna (sin mirar) y saque dos bolitas.

Si son del mismo color, gana usted. Si son distintas, gano yo. ¿Le parece que es justa la división? Es decir, ¿le parece que los dos tenemos 50% de posibilidades de quedarnos con las entradas?

Si su respuesta fuera que sí, explíqueme las razones. En el caso de que supusiera que no y yo le dijera que usted puede agregar una bolita de alguno de los dos colores para incluirla en la urna, ¿de qué color la elegiría para que los porcentajes (ahora) fueran iguales?

La/lo dejo a usted con la mejor herramienta que tiene para elaborar ideas: su cerebro. Piense sin apuro y tómese el tiempo que le haga falta.

(Las respuestas, en la página 214)

Solución a "Los dados y el azar"

Solución del problema 1

Como vimos al principio de esta historia, si usted quisiera calcular la probabilidad de sacar al menos un as al tirar cuatro dados, lo que podría hacer es calcular primero la probabilidad de no sacar ningún as (al tirar estos dados). Supongamos que esa probabilidad es p.

Ahora sabemos que si calculo

$$(1 - p)$$

entonces, este número resulta ser la probabilidad de que sí salga un as, o sea, es exactamente lo que queremos averiguar.

Como la probabilidad de no sacar un as cuando uno tira un dado es 5/6, entonces, la probabilidad de no sacar un as al tirar cuatro dados es (cuatro veces el producto 5/6). O sea

$$(5/6)^4 = 625/1.296 = 0{,}482$$

Luego, la probabilidad de sí sacar un as al tirar cuatro dados es:

$$1 - 0{,}482 = 0{,}518$$

Entonces, eso significa que si uno tira cuatro dados mil veces, uno tiene derecho a esperar que salga al menos un as 518 veces, y no obtener ningún as, en 482 oportunidades.

Es decir, si uno jugara a este juego (al de tirar cuatro dados) en el que uno gana si sale al menos un as, y pierde si no, a la larga, ganaría más veces de las que perdería.

Solución del problema 2

Si uno quiere calcular cuál es la probabilidad de que salga un par de ases al tirar dos dados puede usar la siguiente estrategia.

Al tirar un dado hay seis posibles resultados: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

De todos ellos es solamente favorable un caso (cuando sale el número 1 en cada uno de los dos dados). O sea, la probabilidad es 1/6.

Pero, por otro lado, como voy a tirar dos dados al mismo tiempo, los casos posibles son 36 (6 x 6), mientras que hay UN SOLO CASO FAVORABLE: que salga un as en cada dado.

Luego, la probabilidad de que salga un par de ases al tirar un par de dados una vez, es 1/36 = 0,028.

Si ahora uno quiere calcular cuál es la probabilidad de que salga un doble as al tirar dos veces un par de dados, entonces esta probabilidad es:

(1 – (probabilidad de que no salga un doble as en dos tiradas)) =

$$(1 - (35/36 \times 35/36)) = 71/1.296 = 0,055$$

Note que la probabilidad de que salga un doble as en dos tiradas no es

$$1/36 \times 1/36.$$

Ésta es la probabilidad de que salga un doble as en ambas tiradas.

En cambio, la probabilidad que me interesa a mí (y a usted si está siguiendo esto) es calcular la probabilidad de que salga al menos un doble as al tirar dos veces dos dados, lo que incluye

que pueda aparecer un doble as las dos veces que tiramos los dos dados. Se trata de estimar, entonces, la probabilidad de que salga un doble as en alguna de las dos tiradas que voy a hacer, no de que salga un doble as en ambas tiradas.)

¿Y si tiramos tres veces los dos dados?

Entonces, igual que antes, lo que hay que calcular es:

$$(1 - (35/36)^3) = 3.781/46.656 = 0,081$$

Como es posible advertir, cuantas más veces uno tira el dado aumenta la probabilidad de que aparezca un doble as.

0,028 con una tirada
0,055 con dos tiradas
0,081 con tres tiradas.

En consecuencia, la pregunta original puede ser reescrita así: ¿después de cuántas tiradas de dos dados cada vez, la probabilidad de que salga un par de ases es mayor que 1/2?

(Queremos calcular este número porque saberlo nos indicará cuántas veces tenemos que tirar dos dados para que la probabilidad de que salgan dos ases en alguna de esas tiradas sea mayor que 1/2; o sea, más que un 50%.)

Pascal[51] calculó correctamente que la respuesta es 25 veces. Es decir, si uno tira el par de dados 24 veces, la probabilidad de que no salga un par de ases es mayor de que sí salga (un par de ases). Sin embargo, si uno tirara 25 veces un par de dados, la pro-

51. Blaise Pascal fue un matemático francés a quien se considera el cofundador de la Teoría de Probabilidades con otro francés, el abogado Pierre de Fermat.

babilidad de que salgan dos ases es mayor que 1/2 (o sea, mayor que un 50%).[52]



Solución a "Cuatro bolitas de colores"

Las bolitas que están dentro de la caja las voy a denominar así:

B = Blanca
N = Negra
R1 = Roja 1
R2 = Roja 2

Las posibilidades al extraer dos bolitas son las siguientes:

B y N
B y R1
B y R2
N y R1
N y R2
R1 y R2

Esos son TODOS los posibles pares de bolitas que se pueden extraer. Dicho esto, como el señor anuncia que una de las bolitas

52. Lo que hizo Pascal, fue plantear y resolver la "inecuación" $1 - (35/36)^n > 1/2$. Es decir, Pascal buscó encontrar cuál es el primer número natural (entero positivo) "n", de manera tal que haga verdadera esa inecuación y dedujo que era 25. O sea, $1 - (35/36)^{25} > 1/2$.

es roja, entonces, eso excluye que en la mano tenga la combinación BN.

Sin embargo, debe tener alguna de estas cinco posibilidades:

BR1 – BR2 – NR1 – NR2 – R1R2

Por lo tanto, para calcular la probabilidad de que la otra bolita, o sea, la que no mostró sea roja, lo que hay que hacer es dividir los *casos favorables* sobre *casos posibles*.

Casos favorables: solamente *¡uno!* (R1R2)

Casos posibles: ¡cinco! (BR1 – BR2 – NR1 – NR2 – R1R2)

Luego, la probabilidad de que la otra bolita sea roja es 1/5 (***una en cinco***).



Solución a "Medias blancas y negras"

Respuesta: aunque parezca mentira, la respuesta es… ¡cero!

No parece posible, ¿no? Sin embargo, sígame en este razonamiento y veamos si se pone de acuerdo conmigo.

Llamemos a las medias así: B1, B2, X1 y X2. Las que llamamos B1 y B2 son las dos medias blancas que tiene que haber, si no, no habría posibilidades de tener un par blanco. Las otras dos no sabemos de qué color son.

Veamos cuáles son las posibles combinaciones:

B1 y B2
B1 y X1
B1 y X2

B2 y X1
B2 y X2
X1 y X2

Como se sabe que la probabilidad de sacar un par blanco es de 1/2, no pueden ser todas las medias blancas (si no, ¡la probabilidad sería 1! O un 100%).

Luego, o bien X1 o bien X2, o bien ambas, tienen que ser negras.

Pero para que la probabilidad de sacar dos medias blancas sea 1/2, eso significa que de las seis posibilidades que figuran más arriba, tres tienen que consistir en dos blancas. por lo tanto, las otras tres no pueden tener dos blancas.

Si X1 y X2 fueran las dos negras, entonces si uno mira una vez más las seis posibilidades, quedarían estas probabilidades:

- 2 blancas: 1/6 (B1B2). O sea, un caso favorable sobre seis posibles.
- 2 negras: 1/6 (X1X2). Lo mismo, uno en seis.
- Mixtas: 4/6 = 2/3 (B1X1, B1X2, B2X1 y B2X2). En este caso, hay cuatro favorables sobre seis posibles.

Luego, no pueden ser X1 y X2 negras.

Veamos qué pasa si una de las dos es blanca, digamos X1 y la otra, X2, es negra.

En ese caso, tenemos los siguientes pares blancos:

B1B2, B1X1 y B2X1. Esto da justo 1/2 de probabilidad de que sea un par blanco.

Veamos los otros tres pares que quedan formados:

B1X2, B2X2 y X1X2. Los tres pares restantes ¡son mixtos! luego, la probabilidad de que haya un par negro es ¡cero!

Moraleja: Como siempre, es muy poco probable que a uno en la vida le pidan que ponga la mano en un cajón en donde hay cuatro medias, no lo dejen mirar, y encima le digan que la probabilidad de sacar un par blanco es de 1/2. Casi seguro que no. Pero lo interesante de lo que hicimos más arriba es que uno tuvo que, inexorablemente, pensar distinto para poder contestar. Y eso, pensar distinto, es lo que a uno lo prepara para enfrentar situaciones inesperadas que requieren de soluciones no convencionales. Y como tantas otras veces, es la matemática la que provee las herramientas.[53]



Solución a "Generalización del problema de las medias..."

Supongamos que entre las 16 uno tiene **m** medias blancas y **n** negras. O sea:

$$m + n = 16$$

53. Carlos D'Andrea me hizo una observación muy interesante sobre este problema: "Lo que descoloca es que de una situación de probabilidades es posible calcular exactamente cuántas medias hay. Es decir, con los datos del problema se puede resolver algo mucho más fuerte todavía".

Voy a llamar $\binom{p}{q}$ al combinatorio que cuenta cuántas formas hay de elegir *q* objetos entre *p*.

Entonces, ¿cuántas formas hay de contar pares de medias de manera que sean ambas blancas o ambas negras?

$\binom{m}{2}$ cuenta los pares blancos

$\binom{n}{2}$ cuenta los pares negros

$\binom{m}{1} \text{ x } \binom{n}{1} = \text{m x n}$ cuenta los pares mixtos

¿Cuántas medias blancas y cuántas medias negras tiene que haber para que la probabilidad de sacar un par correcto o un par mixto sea la misma?

Para eso, hace falta que

$$\binom{m}{2} + \binom{n}{2} = \text{m x n}$$

O sea,

$$1/2\ (\text{m x } (\text{m} - 1) + \text{n x } (\text{n} - 1)) = \text{m x n} \quad (*)$$

Entonces,

$$n^2 - n + m^2 - m = 2nm$$
$$(n - m)^2 = n + m \quad (**)$$

Pero uno sabe que $n + m = 16$.

Por lo tanto, $n = 16 — m$.

Luego de la igualdad (**) se sigue:

$$(16 - m - m)^2 = 16$$
$$(16 - 2m)^2 = 16$$

Calculando las raíces del polinomio cuadrático[54] en *m* se obtienen dos valores, que son los que pueden tomar *m* y *n* para que tenga solución el problema, y esos valores son

$$(m = 10 \text{ y } n = 6) \text{ o bien } (n = 10 \text{ y } m = 6).$$

Luego, encontramos lo que estábamos buscando: para que la probabilidad de sacar dos medias que formen un par correcto sea de 1/2 (o el 50% de las veces) hace falta que haya o bien 10 medias blancas y 6 negras, o al revés, 6 medias negras y 10 blancas.

Solución en el caso de tener un número k de medias

Ahora suponemos que se tienen *k* medias, de las cuales *m* son blancas y *n* son negras y se sabe que la probabilidad de sacar un par correcto es de 1/2, la pregunta sigue siendo: ¿quiénes tienen que ser *n* y *m*?

Por lo tanto, en este caso, cuando $(n+m) = k$, la ecuación de (**) resulta:

$$(k - 2m)^2 = k$$

54. Para que el polinomio tenga raíces enteras, es necesario usar 16 que es un cuadrado. Es que el polinomio que resulta es $(m^2 - 16m - 60)$ y el discriminante resulta ser $(16^2 - 4{,}60) = 256 - 240 = 16$.

$$4m^2 - (4k)\,m + (k^2 - k) = 0 \quad (***)$$

Luego, igual que antes, uno se tropieza con un polinomio cuadrático, y quiere calcular sus raíces. En este caso son:

$$m = 1/8\,\{4k \pm \sqrt{[(4k)^2 - 16(k^2 - k)]}\}$$

$$m = 1/2\,(k + \sqrt{k})\text{ , o bien}$$

$$m = 1/2\,(k - \sqrt{k})$$

De aquí se ve que si *m* es una de las raíces, entonces *n* es la otra, y viceversa.

Esto explica que *k* TIENE que ser un cuadrado para que el problema tenga solución. Es que como usted advierte en (***) aparece involucrada la raíz cuadrada del número *k* y, por lo tanto, para que sea un número entero, ese número *k tiene* que ser un cuadrado (o lo que es lo mismo, *k* tiene que ser el *cuadrado* de algún número natural).

Analizando hacia atrás el caso original, en donde $k = 4$, como uno sabía que la probabilidad de que al meter la mano en el cajón saliera un par blanco es 1/2, entonces, solamente puede haber UNA media negra y, por lo tanto, la probabilidad de que salga un par negro (como decía el problema original) es ¡CERO!

$$m = (1/2)\,(4 + \sqrt{(4)}) = (1/2)\,(4 + 2) = (1/2) \times 6 = 3$$
$$n = (1/2)\,(4 - \sqrt{(4)}) = (1/2)\,(4 - 2) = (1/2) \times 2 = 1$$



Solución a "¿Quién paga la comida?"

Anotemos los resultados posibles en una tabla y comparemos quién tiene más casos a favor.

Usted (1er. tiro)	Usted (2do. tiro)	Yo (único tiro)
Cara	Cara	Cara
Cara	Cara	Ceca
Cara	Ceca	Cara
Cara	Ceca	Ceca
Ceca	Cara	Cara
Ceca	Cara	Ceca
Ceca	Ceca	Cara
Ceca	Ceca	Ceca

Ahora, observe las filas sombreadas. En esos casos únicamente, usted tiene más caras que yo. Por lo tanto, usted tiene cuatro posibilidades a favor y yo, otras cuatro.

La moraleja es que si yo pensaba que alguno de los dos tenía más posibilidades luego haber incrementado el número de tiradas estaba equivocado. Aun variando el número de tiros, la probabilidad de acertar sigue siendo la misma.

Más aún, la/lo invito a pensar lo siguiente. Con una moneda más que yo, la probabilidad no incrementa. Es decir, si usted tuviera ocho monedas y yo siete, la probabilidad es la misma. O si usted tuviera 101 y yo 100, pasaría lo mismo. ¿Será siempre cierto esto? (Esto último queda como "tarea para el hogar"… Qué mal suena eso, ¿no?)



Solución a "Un problema precioso sobre probabilidades"

Le propongo que pensemos juntos cuáles son los divisores de 396. Es que si se trata de ver cuántos números (de los que se pueden obtener con cada distribución) son divisibles por 396, lo primero que hay que hacer es descomponer al número 396 y fijarse cuáles son sus factores:

$$396 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11$$

Luego, para que uno de los números que se obtiene al hacer la distribución al azar de los dígitos sea divisible por 396, tiene que ser divisible por 4, por 9 y por 11 (por lo menos). Por ejemplo, no alcanzaría que fuera divisible por 2 solamente, porque necesita ser divisible por 4 para que pueda ser divisible por 396. Pero nada le impide ser divisible por 8 o por 16. Es decir, puede ser divisible por cualquier potencia de dos, pero al menos tiene que ser divisible por 4. Tampoco alcanzaría con que fuese divisible por 3 nada más. Tiene que ser divisible por 9. Y por último, tiene que ser divisible por 11.

Recuerdo acá las reglas de divisibilidad. ¿Qué quiero decir con esto? Quiero decir, ¿qué tiene que pasar para que un número sea divisible por 4? ¿Y por 9? ¿Y por 11?

Para que sea divisible por 4, los dos últimos dígitos del número tienen que ser divisibles por 4. Eso garantiza lo que uno quiere.[55]

Para ser divisible por 9, es necesario (y suficiente) con que la suma de todos los dígitos sea divisible por 9.

---

55. En realidad, es una condición *necesaria* y *suficiente*. Un número es divisible por 4 *si y sólo si* sus últimos dos dígitos son divisibles por 4.

Y por último, para que sea divisible por 11, lo que tiene que pasar es que la suma alternada (es decir, uno va sumando uno y restando otro) de los dígitos que componen el número sea múltiplo de 11.

Por ejemplo, el número 121 es múltiplo de 11, porque si uno suma alternadamente sus dígitos:

$$1 - 2 + 1 = 0 \text{ (que es múltiplo de 11)}$$

Otro ejemplo: el número 407 es múltiplo de 11, porque la suma alternada de sus dígitos es:

$$4 - 0 + 7 = 11 \text{ (que es múltiplo de 11)}$$

En cambio, el número 1234567 no es múltiplo de 11, porque la suma alternada de sus dígitos:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 = 4 \text{ que } \textbf{no es múltiplo de 11}$$

Último ejemplo: el número 165.649 también es múltiplo de 11 ya que la suma alternada de sus dígitos es:

$$1 - 6 + 5 - 6 + 4 - 9 = -11\text{, que es múltiplo de 11}$$

Más aún: cuando un número tiene muchos dígitos, si uno quiere saber si es múltiplo de 11 o no, puede hacer lo que escribí más arriba, o bien, sumar todos los dígitos que están en las posiciones pares, y restar los que están en las posiciones impares.

Por ejemplo, como vimos recién, para saber si el número 165.649 es múltiplo de 11 uno suma los dígitos que están en posiciones impares: 1, 5 y 4. O sea,

$$1 + 5 + 4 = 10$$

Por otro lado, suma los que están en las posiciones pares: 6, 6 y 9.

O sea, $6 + 6 + 9 = 21$

Luego, cuando uno resta $10 - 21 = -11$ (que es múltiplo de 11).

Esta forma de estimar si un número es o no múltiplo de 11, es otra manera de hacer la suma alternada. No contiene nada nuevo. Técnicamente parece más sencilla. Sólo eso.

Ahora, con todos estos datos que hemos juntado, estamos en condiciones de seguir avanzando.

Analicemos los casos:

a) No importa cuál sea la distribución que usted haga, como todos los números van a terminar en 76, y 76 es un número divisible por 4, entonces, todos los números van a ser divisibles por 4.
b) Para averiguar si cualquiera de estos números es múltiplo de 9, basta con sumar todos los dígitos. Lo interesante es que cuando usted haga la distribución al azar de los dígitos que yo le di (del 0 al 9), no importa cómo estén esparcidos por el número final, la suma siempre va a dar lo mismo. En este caso, los números que figuraban antes (los que están en las posiciones impares) suman:

$$5 + 3 + 8 + 3 + 8 + 2 + 9 + 3 + 6 + 5 + 8 + 2 + 0 + 3 + 9 + 3 + 7 + 6 = 90$$

Por otro lado, la suma de los 10 dígitos:

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

Si ahora sumamos 90 + 45 = 135

Y este número, ¡es múltiplo de 9!

Luego, hemos deducido que no importa cuál sea la distribución de los dígitos que uno haga, el resultado es siempre un múltiplo de 9.

c) Ahora, falta el último paso: determinar cuáles de los números que se generen son múltiplos de 11.

Para esto, le pido que me siga con el siguiente razonamiento: al distribuir los 10 dígitos, estos van a ocupar posiciones pares. Le sugiero que recorra la lista original (con los espacios en blanco) y fíjese que todos esos lugares están en posiciones pares.

Pero, al margen de los 10 dígitos, aparecen ahora otros dígitos: el 8 (que está en la cuarta posición), el 3 (que está en la décima segunda), el 0 (que está en la vigésima) y por último el 6 (que está en la vigésima octava).

5 _ 383 _ 8 _ 2 _ 936 _5 _ 8 _ 203 _ 9_ 3 _ 76

Por lo tanto, ahora, para averiguar si el número que uno va a generar es o no múltiplo de 11, basta fijarse que si uno suma todos los dígitos que están en las posiciones pares, obtiene:

Por un lado 45, que es la suma de todos los dígitos que faltan incorporar y, por otro lado, hay que sumar 8 + 3 + 0 + 6 = 17.

Luego, el total de las posiciones pares resulta ser (17 + 45 = 62).

La suma de las posiciones impares es:

$$5 + 3 + 3 + 8 + 2 + 9 + 6 + 5 + 8 + 2 + 3 + 9 + 3 + 7 = 73$$

Ahora, para decidir si el número será o no múltiplo de 11 uno tiene que restar la suma de las posiciones impares (73) menos la suma de las posiciones pares (62):

73 – 62 = 11 (que es múltiplo de 11, obviamente).

Acá, quiero hacer una interrupción. Lo invito a que piense qué hemos deducido juntos (usted y yo). Piénselo usted sola/solo.

Sigo: hemos descubierto que sea cual fuere la distribución que haga usted de los diez dígitos que yo le había dado al principio, cualquiera de los números que resulte es:

a) Múltiplo de 4
b) Múltiplo de 9
c) Múltiplo de 11

Luego, cualquiera de esos números, resultará ser múltiplo de 396.

Y, como moraleja final, lo que se deduce es que *la probabilidad de que el número que uno obtenga sea múltiplo de 396 es ¡1!* O sea, ¡pasa siempre!

Este problema es una manera muy bonita de exhibir, una vez más, cómo algo que en principio parece no tener respuesta, o bien resultaría tan laborioso analizar caso por caso, que parece no tener solución y, sin embargo, con el análisis que hemos hecho, permite deducir que todos son múltiplos de 396.

Para terminar, una pregunta breve: ¿cuántos números posibles se podrían generar al distribuir los diez dígitos?

(Acá la/lo dejo con usted mismo por un rato y luego sigo.)

No lea lo que sigue si todavía no se dio oportunidad de pensar la respuesta a la última pregunta.

Ahora sí: como hay 10 dígitos para distribuir, hay 10! (¿se acuerda del factorial de un número?)

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3.628.800$$

Esto quiere decir que, si hubiéramos tenido que analizar caso por caso, habríamos tenido que evaluar más de 3.600.000 números para saber si eran (o no) múltiplos de 396.



Solución a "¿Es justa esta decisión?"

¿Qué pudo pensar usted? ¿Qué le pareció que pasaría (o que debería pasar)?

¿Será verdad que por el hecho de que haya dos bolitas blancas la probabilidad de que salgan dos del mismo color es más grande de que aparezcan dos distintas? ¿O será lo mismo?

Pensemos en la posibilidad juntos, usted y yo.

A las dos bolitas blancas las voy a llamar B1 y B2. La roja será R.

Al extraer dos de la urna, ¿cuáles y cuántas son las posibilidades?:

B1 y R
B2 y R
B1 y B2

Es decir, uno advierte inmediatamente que hay tres posibles maneras distintas de obtener un par de bolitas, pero de estas tres formas hay ¡dos que tienen bolitas de diferente color y sólo una que tiene las dos bolitas iguales!

O sea, la probabilidad de tener dos bolitas de diferente color es 2/3 (dos posibilidades entre tres) y la probabilidad de tener dos bolitas del mismo color es 1/3 (una entre tres).

Por lo tanto, a usted no le conviene aceptar mi invitación pues yo tengo el doble de posibilidades que usted de quedarme con las entradas.

Ahora, pasemos a la siguiente pregunta. Supongamos que usted tiene la oportunidad de agregar una bolita a la urna de manera tal de igualar las posibilidades suyas y mías, ¿qué color de bolita elegiría?

Le recuerdo que tenemos dos blancas (B1 y B2) y una roja (R). Usted ganaba si salían dos iguales y yo, si salían dos distintas.

Fíjese lo que pasaría si agregáramos una bolita roja más. Las bolitas rojas son ahora R1 y R2 (y las blancas siguen siendo B1 y B2).

Las posibilidades ahora al sacar dos bolitas son (y por supuesto, como siempre, la/lo invito a usted a que siga usted por su cuenta pensando cuántas posibilidades habrá):

B1 y B2
B1 y R1
B1 y R2
R1 y B2
B2 y R2
R1 y R2

O sea, las posibilidades en total son seis, y de las seis, solamente dos corresponden a bolitas del mismo color y cuatro a bolitas de distinto color. Luego, las probabilidades son:

a) Probabilidad de que salgan dos bolitas del mismo color: 2/6 = 1/3.

b) Probabilidad de que salgan dos bolitas de distinto color: 4/6 = 2/3.

La moraleja entonces es que aun agregando una bolita roja, igual yo sigo teniendo más posibilidades de quedarme con las entradas. Igual que antes, yo sigo duplicando las posibilidades suyas.

Queda entonces pendiente la siguiente pregunta: ¿qué pasará si agrego otra bolita blanca más en lugar de una bolilla roja? Eso significaría tener tres bolitas blancas: B1, B2 y B3. Y siempre está la bolilla roja (R).

Fíjese lo que pasa ahora. ¿Cuáles y cuántas son las posibles maneras de extraer dos bolillas?

B1 y R
B2 y R
B3 y R
B1 y B2
B1 y B3
B2 y B3

O sea, siguen habiendo seis posibles resultados. Sin embargo —y esto es lo que se transforma en muy diferente y muy importante— ahora en tres de los casos hay bolillas del mismo color, y en los otros tres, son bolitas de diferente color.

La moraleja entonces es que ahora SÍ hay las mismas chances para los dos: hay un 50% de posibilidades de sacar dos bolillas de igual color y 50% de posibilidades de sacar bolillas de diferente color.

Ahora sí, entonces, hemos logrado reemplazar al hecho de tirar una moneda. Lo curioso (y ciertamente antiintuitivo) es que

al agregar una bolita del color que falta (rojo), uno esperaría haber corregido el problema. O sea que, al haber dos bolitas de cada color, la probabilidad de sacar dos bolitas del mismo color o de colores diferentes fuera la misma. Sin embargo, no es así. Para garantizar eso, lo que uno podría hacer es agregar una cuarta bolita, pero del mismo color del que había dos (blanca) y entonces sí, todo queda como uno pretendía.

ARITMÉTICA

¿Cómo hacer un fixture?

Uno de los problemas más lindos que uno puede tener cuando organiza una actividad deportiva es confeccionar un programa de partidos.

Naturalmente, hay mucha diferencia entre hacer un fixture en el tenis, en donde se juega por simple eliminación, que hacerlo en el fútbol en un campeonato local, en donde todos los equipos tienen que jugar contra todos.

También hay torneos en los que aparece una mezcla de ambos sistemas. Por ejemplo, en el campeonato mundial de fútbol (que se juega cada 4 años), los 32 equipos se dividen en ocho zonas de cuatro equipos cada una, y allí juegan todos contra todos.

Luego los dos mejores de cada grupo se clasifican para los octavos de final, pero allí ya se emplea el sistema del tenis: el que pierde se queda afuera del torneo.

Pero volvamos al caso de un torneo en donde tengan que jugar todos contra todos. La pregunta que surge es ésta: si uno tiene 20 equipos (por poner un número cualquiera) en cualquier deporte y quiere confeccionar un programa de partidos que contemple:

a) que todos jueguen contra todos;
b) que vayan alternando la condición de local y de visitante en cada fecha;
c) que si hay dos equipos en una misma ciudad (o barrio), uno no quiere que jueguen ambos de local en la misma fecha.

Como usted imagina, con cada restricción que uno agrega las posibilidades de solución decrecen.

Pero, de hecho, uno sabe que el problema[56] tiene solución, porque se han venido jugando torneos de todos los deportes, si me permite la exageración, desde la Edad de Piedra.

Y si uno quisiera que un determinado clásico se juegue en una determinada fecha, ¿se puede contemplar también?

Lo que le propongo, entonces, es que piense una estrategia para encontrar un programa de partidos que permita encontrar la mejor solución posible.

Dos observaciones más:

a) El número de equipos no tiene por qué ser veinte. Usted elija la cantidad que quiera. La solución que encuentre se podrá ajustar a cualquier número de equipos. Más aún: si me permite una sugerencia, le propongo que empiece con pocos equipos al principio (seis, ocho) y después fíjese cómo extender lo que hizo cuando tenga 20.

---

56. Me refiero a que se sabe que existen fixtures que cumplen con las propiedades (a), (b) y (c). Por supuesto, si todos los equipos estuvieran en el mismo barrio, entonces la condición (c) NO se podría cumplir.

b) Le sugiero, además, que numere los equipos en lugar de ponerle nombres, para ahorrar tiempo. Pero, por supuesto, tómese la libertad de hacer lo que más le convenga. No acepte (necesariamente) mis sugerencias.

Ahora, le toca a usted.

(Las respuestas, en la página 239)

¿Cómo elegir una clave secreta?[57]

Suponga que usted trabaja en un banco o en un lugar donde hay objetos radiactivos muy sensibles, que deben permanecer bien protegidos. Tanto el dinero o los documentos, en el primer caso, como el material clasificado en el segundo, van a estar conservados en una habitación segura, de difícil o imposible acceso para quien no tenga la clave de entrada, que consiste en una combinación de 6 dígitos.

Justamente, le piden a usted que diseñe esta clave. Se sabe que ya hubo algunos intrusos que lograron burlar toda la seguridad que existía y que utilizando métodos muy sofisticados tuvieron acceso al teclado que se usó para marcar esa clave por la gente autorizada y pudieron determinar (usando huellas digitales o incluso midiendo rasgos de humedad en las teclas) qué dígitos se usaron, pero no pudieron descubrir en qué orden ni las repeticiones.

57. Este problema me lo contó Carlos Sarraute (excelente matemático, especialista en criptografía), quien en colaboración con Aureliano Calvo, Ariel Futoransky y Ariel Waissbein tienen que resolver muchísimas situaciones de este tipo en la vida real. Carlos se ocupa de proveerme abundante material para los libros y programas de televisión. Mi gratitud por su dedicación y la calidad de los planteos que hace.

Por ejemplo, estos atacantes no podrían distinguir entre el número 332211 y el 123333.

La pregunta es: ¿de qué manera le conviene a usted diseñar la clave, de modo tal de que cualquier potencial atacante tenga menos chances de adivinarla?

Ahora sí, le toca a usted.

(La respuesta, en la página 246)

Caramelos para todos

El siguiente problema me parece sencillamente precioso. Tiene casi todos los elementos que permiten que uno se entretenga mientras lo piensa, sirve para elaborar estrategias para resolverlo, es sencillo en su planteo, es divertido, permite que uno juegue con él y se imagine siendo uno de los participantes; en fin, tiene muchos componentes que me parece que lo distinguen.

Involucra, además, un concepto muy importante dentro de la matemática, que es la iteración, o repetición. Es decir, muchas veces uno quiere encontrar la solución a un problema, y lo que hace es ir aproximándose al resultado en diferentes intentos. Por ejemplo, si uno quiere subir un piso por una escalera, uno no sube todos los escalones en un solo salto, sino que establece una estrategia de ir levantando una pierna primero, apoyando el pie en el escalón de arriba, levantar luego la otra pierna y, o bien apoyar el pie de esa pierna en el escalón alcanzado por la anterior, o ir directamente al escalón de más arriba. Es decir, uno establece un método de subir y lo hace en un proceso, que al finalizar, lo lleva al piso de arriba.

Este algoritmo, que aparece como sencillo (porque realmente lo es, por eso lo parece), es muy útil para resolver problemas de matemática también. Pero lo que yo quiero hacer acá tiene que

ver con algo que podemos hacer todos, independientemente de la cultura matemática que uno tenga. Es decir, todo lo que hace falta son ganas de pensar y de entretenerse en el camino.[58]

Hechas las presentaciones, acá va.

Una maestra tiene a sus alumnos sentados en un círculo (no importa cuántos son). Todos ellos tienen en sus manos una cantidad par de caramelos.[59] En el momento en que la maestra aplaude, cada alumno le entrega al compañero que tiene sentado a su derecha la mitad de los caramelos que tiene. Por supuesto, cada alumno entrega la mitad de los que tiene pero recibe (del alumno que tiene sentado a su izquierda), la mitad de los caramelos que tiene ella/él.

Una vez que se produjo la redistribución de los caramelos, podría pasar que ahora hubiera quedado algún alumno con una cantidad impar de caramelos. En ese caso, la maestra le ofrece un caramelo más, de manera que otra vez, todos los alumnos tengan un número par de caramelos en las manos.

Y ahora sí, repite el proceso. Es decir, vuelve a aplaudir, y cada alumno vuelve a entregar la mitad de los caramelos que tiene en las manos al compañero que tiene a la derecha.

Varias preguntas:

---

58. Antes del planteo quiero darles el crédito a quienes les corresponde. Yo vi este problema en un artículo que escribió Ron Lancaster en la revista de la Asociación Americana de Matemática (del 10 de enero de 2000). De ahí en más leí una revisión que publicó Ed Sandifer en la misma revista en el número siguiente. Sin embargo, el problema en sí mismo fue publicado en el libro *Over and Over Again* ("Una y otra vez") de Gengzhe Chang y Thomas W. Sederberg.

59. El número 0 es un número par, por lo que bien podría pasar que algún o algunos alumnos no tuvieran caramelos.

a) ¿Qué cree que pasa si uno repite el proceso una y otra vez?
b) ¿Habrá algún alumno que se queda con todos los caramelos?
c) ¿O serán varios?
d) ¿Dependerá del número de alumnos con el que uno empieza el juego?
e) ¿Dependerá de la cantidad de caramelos que tenga originalmente en la posición inicial?
f) ¿Se empezará a repetir alguna posición?

En fin, como usted advierte, las preguntas podrían ser muchas. En el libro de Chang y Sederberg, junto con el planteo, los autores dan la solución. En cambio, en el artículo de Lancaster se invita al lector a que haga su propio análisis y encuentre la respuesta.

En la página de respuestas de este capítulo está escrita la solución primero y después, más adelante, la explicación de por qué ésa es la solución. Pero, como siempre, ¿qué gracia tiene leer la solución ahora? Es muchísimo más interesante no saber qué puede pasar y empezar con ejemplos sencillos hasta intuir el resultado.

Créame, uno se siente muy potente si llega a conjeturar qué es lo que sucede, si uno repite o itera el proceso del aplauso y la consecuente redistribución de los caramelos. Vale la pena que no se robe a usted mismo esa posibilidad.

(Las respuestas, en la página 253)

Años al cuadrado

La mejor manera de honrar a un escritor es perpetuando su obra y divulgarla tanto como sea posible. En el caso de los difusores de la matemática, especialmente de la matemática recreativa, hay algunos autores que han sobresalido en la última parte del siglo XX y ahora en el XXI. Uno de ellos es Ian Stewart, de una tarea tan prolífica como exquisita. Stewart nació en Inglaterra en 1945 y es profesor en la Universidad de Warwick. Casi cualquier problema de su vasta bibliografía sería suficiente para distinguirlo. El que sigue es sólo uno de ellos. No hace falta que diga que el mérito es todo de él. Acá va.

Era la noche del 31 de diciembre del año 2001. Gerardo y Marcela estaban hablando sobre las edades que tenían (ninguno había llegado aún a los sesenta). Entramos en el diálogo que mantenían cuando Marcela dijo: "En algún momento del pasado, el año calendario correspondía exactamente al cuadrado de la edad de mi padre. Más aún: ¡él logró vivir hasta los 100 años!".

Gerardo acotó entonces: "Qué interesante, porque en algún momento del futuro, el año calendario será el cuadrado de la edad que yo voy a tener en ese momento".

La pregunta es: ¿en qué años nacieron Gerardo y el padre de Marcela?

(La respuesta, en la página 258)

Problema de D'Andrea

Carlos D'Andrea vive ahora en España, más precisamente en Barcelona. Es profesor de la Universidad de Barcelona. Pero nació en Corrientes (Argentina). Obtuvo su licenciatura como matemático en la Universidad de Buenos Aires. Se doctoró también en la Argentina con la tutoría de Alicia Dickenstein. Se mudó a Berkeley, muy cerca de San Francisco, en California, Estados Unidos. Hizo una brillante carrera allí y luego se instaló en Europa, en donde sigue su imponente producción. ¿Por qué toda esta biografía? Porque Carlos es uno de los más fervientes impulsores de la matemática recreativa que tiene el mundo. Y su entusiasmo por la matemática excede lo personal. Su entusiasmo es infeccioso, contagia.

Carlos me envió un problema que quiero compartir. En principio, no voy a escribir la versión más general porque la idea de lo que hay que pensar se puede reducir a casos un poco más sencillos, pero de todas formas invito a quien esté leyendo esta historia a que intente avanzar un poco más. Ya verá cómo.

La idea es ésta. Se tienen los primeros 20 números naturales:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

Elija cualesquiera 12 de ellos, no importa cuáles, pero sí importa que sean doce. Fíjese que seguro que hay dos de los que eligió, cuya suma resulta ser OTRO de los números que eligió. Seguro. Pero, ¿por qué?

El problema así planteado creo que es atractivo y pensar la solución implica descubrir en el camino cómo hacer en el caso más general. Pero por ahora, la/lo invito a que se entretenga con este caso particular.[60]

(La respuesta, en la página 260)

60. Es interesante notar que si uno eligiera solamente 11 (y no 12) números, el resultado no es cierto. Por ejemplo, si uno elige estos 11 números: (10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20) cualquier par de ellos sumados entre sí da más que 20; o sea, no está en el conjunto. Por lo tanto, el número 12 es el primero que hace cierta la afirmación.

Miles de millones

Cuando usted escucha hablar de miles de millones, sea para indicar los dólares que debe cada país en términos de su deuda externa, o del número de células que hay en un cuerpo humano, o en los años luz de distancia que estamos de una cierta estrella, ¿no siente como si los números se escurrieran entre los dedos y termina perdiendo la noción de lo que le están diciendo?

En todo caso, es siempre bueno poner las cosas en perspectiva y avanzar desde allí. Por eso es que me interesa hacer algunas comparaciones como para entender mejor.

¿A qué me refiero? Una campaña publicitaria en Italia y Estados Unidos promocionaba un producto haciendo estas observaciones:[61]

1.000.000.000 de segundos = (casi) 32 años
1.000.000.000 de minutos = (casi) 1.903 años
1.000.000.000 de horas = (más de) 114.115 años
1.000.000.000 de días = (más de) 2.739.726 años

61. Obviamente, todas son aproximaciones.

Pero, otra vez, así presentado no dice demasiado (salvo el caso de los segundos, ¿no?)

Ahora mírelo de esta otra forma:[62]

a) 1.000.000.000 de segundos atrás era el año 1979.
b) 1.000.000.000 de minutos atrás, se conmemoraban los 75 años del fallecimiento de Jesús.
c) 1.000.000.000 de horas atrás, nuestros antepasados vivían aún en la Edad de Piedra.
d) 1.000.000.000 de días atrás, nadie caminaba sobre la superficie terrestre en dos piernas.

Creo que puesto de esta manera se entiende un poco mejor.

62. Esta historia sobre los números grandes la escribí en el año 2011, pero usted puede adaptar los cálculos al momento en el que esté leyendo estas líneas.

La belleza de la aritmética

La percepción que muchas veces tiene la sociedad respecto de la matemática es que gira alrededor de los números. Creo que los distintos episodios de *Matemática… ¿estás ahí?* desafían esa idea.

Sin embargo, hay algunas curiosidades o pequeñas joyas de la aritmética ante cuya belleza vale la pena rendirse. En lo que sigue, voy a exponer algunas de las gemas que si bien son muy conocidas (dentro de ciertos ámbitos académicos) no dejan de ser fascinantes. Acá van. Que las disfrute.

1) Fórmula preciosa

Por favor, le pido que haga los siguientes cálculos:

$$10^2$$
$$11^2$$
$$12^2$$
$$13^2$$
$$14^2$$

Compruebe conmigo que los números que encontró son:

$$10^2 = 100$$
$$11^2 = 121$$
$$12^2 = 144$$
$$13^2 = 169$$
$$14^2 = 196$$

Así, a simple vista, no pareciera que sugirieran nada, ¿no?

Sin embargo, sume los tres primeros:

$$100 + 121 + 144$$

Ahora, sume los dos últimos:

$$169 + 196$$

Lo notable es que ¡dan lo mismo! Es decir, el resultado en ambos casos es 365.

Por lo tanto, hemos descubierto que

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

No sólo eso, sino que son iguales a 365, que es el número de días que tiene un año. Claro, es pura casualidad, pero no deja de ser muy bonito, ¿no le parece?

2) Hay solamente dos números de cuatro dígitos que son múltiplos exactos de sus reversos. Uno es el 8.712 y el otro es el 9.801. Fíjese en estas dos igualdades que lo verifican:[63]

---

63. Le dejo a usted la tarea de comprobar que 8.712 y 9.801 son los únicos números de cuatro dígitos que verifican esta propiedad (ser múltiplos de sus reversos).

$$a)\ 8712 = 4 \times 2178$$
$$b)\ 9801 = 9 \times 1089$$

3) Es muy conocido que $3^2 + 4^2 = 5^2$. Es decir, los números 3, 4 y 5 forman lo que se llama una terna pitagórica.[64] Pero lo interesante es que también se verifica esta otra igualdad:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

Es que 27 + 64 + 125 = 216.

¿No es bonita esta igualdad?

4) Otra igualdad preciosa que involucra a los números enteros es la siguiente:

$$438^2 + 951^2 + 276^2 = 834^2 + 159^2 + 672^2$$

¿Logra advertir alguna curiosidad? Es que los números que figuran a la derecha son los reversos de los que figuran a la izquierda (y viceversa, claro está). Pero no termina todo ahí. Si se fija con un poco más de cuidado, en el lado izquierdo de la igualdad, aparecen todos los dígitos sin repetir (salvo el cero). Y, por supuesto, como a la derecha figuran los reversos, eso significa que de ese lado también están todos los dígitos sin repeticiones. Una verdadera preciosura.

---

64. Confrontar en el episodio 3,14159… de *Matemática… ¿estás ahí?*, página 87. Son las ternas de números enteros (a, b, c) que verifican: $a^2 + b^2 = c^2$. Por ejemplo (3, 4, 5) es una terna pitagórica porque $3^2 + 4^2 = 5^2$.

5) Otra perla de la aritmética. Si uno calcula el cubo del número dos, obtiene:

$$2^3 = 8$$

Por otro lado, si ahora uno invierte el 2 y el 3, obtiene:

$$3^2 = 9$$

Es decir, el par (2, 3) tomado de esa forma, o el simétrico (3, 2), generan dos números consecutivos: 8 y 9.

Uno podría preguntarse, entonces, si este caso (el del 8 y el 9) es único, o si hay otros ejemplos.[65]

En el año 1844, el matemático belga Eugène Charles Catalan (1814–1894) conjeturó que ése era el único par, pero no lo pudo probar. Pasaron 158 años y en 2002, el rumano Preda Mihailescu demostró que Catalan tenía razón: no hay ningún otro ejemplo de números consecutivos que resulten ser un cuadrado y un cubo.

6) Por último, así como recién vimos la curiosidad entre el 8 y el 9, fíjese qué increíble propiedad que cumple el número 26:

El número 26, está ubicado entre el número 25 (que es un cuadrado perfecto)[66] y el número 27 (que es un cubo perfecto).

---

65. Éste es el tipo de preguntas que muy bien puede hacerse un matemático. La idea es tratar de saber si lo que uno encontró es algo que se repite varias veces (y si es así cuántas, y encontrarlas o caracterizarlas todas), o si bien sucede en una sola ocasión. Una vez que uno logró describir lo que sucede en todos los casos, puede estar tranquilo y pasar a analizar un próximo problema.

66. Se dice que un número entero n es un cuadrado perfecto, si resulta de elevar al cuadrado un número entero. Por ejemplo, 4, 16 y 100 son todos cuadrados perfectos, porque se obtienen como 2^2, 4^2 y 10^2, respectivamente.

Pero lo que es más notable aún, es que el número 26 ¡es el único número que está encerrado entre un cuadrado y un cubo perfecto entre todos los números enteros!

Solución a "¿Cómo hacer un fixture?"

Tal como usted se imagina, hay muchísimas formas de elaborar un programa de partidos. Yo sólo voy a ofrecer una versión.

Piense esto conmigo y fíjese si está de acuerdo: el calendario de partidos va a consistir de 19 fechas, porque cada equipo tiene que jugar contra los 19 restantes.

Después, para que se pueda contemplar que cada equipo haya jugado frente a otro, tanto de local como de visitante, hará falta jugar una segunda rueda, que tendrá como programa de partidos los mismos que en la primera, pero con el orden de localía invertido.

Por eso me voy a concentrar en hacer un programa para las primeras 19 fechas.

Empiezo por numerar los equipos, del 1 al 20.

Al numerar los equipos lo hago de tal forma que los rivales clásicos, o los que juegan en la misma ciudad o barrio los voy a separar por 10 números. O sea, voy a suponer que hay 10 parejas de equipos que no quiero que jueguen de local la misma fecha.

Si uno de ellos lleva el número 3, el otro tendrá el 13. Y si uno de los miembros de esa pareja tiene el 7, el otro tendrá el 17.

Como usted advierte, como en total hay 20 equipos, cada fecha consistirá en 10 partidos.

Al equipo número 20 lo voy a usar como comodín. Ya va a entender a qué me refiero.

Y acá voy a proponer la idea central de lo que voy a hacer, y le pido que no avance si no me sigue en esta idea. Si no se entiende, o bien piénselo usted de otra forma, o vuelva a leer lo que escribí hasta que le quede claro.

La idea es la siguiente: en la primera fecha, voy a hacer enfrentar a los equipos cuyos números sumen 21. En la segunda,

los que sumen 22. Y así siguiendo. Por ejemplo, la novena fecha consistirá en los partidos que resulten de aparear a los equipos que sumen 29 (recuerde que cada equipo tiene un número asociado).

Sin embargo, esto va a presentar un problema inmediato: por ejemplo, cuando en la cuarta fecha yo quiera que los equipos que se enfrenten sumen 24, ¿quién va a jugar contra el equipo número 1? Como no hay 23 equipos, no hay ninguno que lleve el número 23. ¿Y entonces? Y lo mismo va a pasar con el rival del 2 o del 3. ¿Qué hacer?

Acá la/lo invito a hacer una pausa. La/lo quiero hacer pensar en algo.

Por un momento olvídese del problema. Cuando a usted le preguntan la hora, y usted mira su reloj y ve que son las 3 de la tarde, usted, ¿qué contesta?

Podría decir que son las 15 horas. O si no, podría decir que son las 3 de la tarde.

Y en realidad, todo el mundo —que sabe calcular la hora— entiende que 15 y 3 (de la tarde) son lo mismo. Porque se entiende que el número 3 lo que indica son las horas que pasaron después de las 12.

Si yo dijera las 9 de la noche, se entendería que pasaron 9 horas de las 12. Por lo tanto, las 9 de la noche y las 21 son la misma cosa.

Si uno quisiera usar la misma idea en el caso del fixture de partidos, el número 4 y el número 23 serán el mismo si uno cuenta como iguales a los que se pasan de 19. Porque 4 + 19 = 23.

Así como con el reloj, las 21 horas equivale a las 9 + 12, en este caso, el 23, es lo mismo que el 4.

Moraleja: Cuando uno está buscando aparear los equipos de manera tal que sumen 23, y se tropieza con aquellos a los que no

se les puede encontrar un rival directamente, entonces, lo que uno hace es buscar quién debería ser el rival para que sumen cuatro (ya que 4 + 19 = 23).

Ahora ya estamos preparados para construir el programa de partidos, aunque me tienta mucho invitarla/lo a que lo haga usted. En todo caso, si le parece tedioso, o no se entretiene demasiado pensando la respuesta, lea lo que sigue. Si no, resérveselo para otro momento en el que tenga más tiempo.

Acá va.

Fecha 1: empiezo apareando a los rivales que suman 2 (o 21, que es 2 + 19).

Se van a enfrentar:

1–20
2–19
3–18
4–17
5–16
6–15
7–14
8–13
9–12
10–11

(Los que figuran en primer término son los locales.)

Fecha 2: son los que ahora suman 3 (o 22, que es 3 + 19).

1–2
19–3

18–4
17–5
16–6
15–7
14–8
13–9
12–10…
...
20–11

Y acá quiero detenerme un instante para que pensemos juntos algo: el número 11, ¿por qué juega contra el 20?

Lo que pasa es que como uno quiere que la suma de los dos rivales sea 22, en el caso del 11, el único rival cuya suma da 22 es si jugara ¡contra sí mismo! En ese caso, lo que uno hace, es forzarlo a jugar con el número 20, que funciona como un comodín.

Y eso voy a hacer siempre. Cuando a un equipo le toque jugar contra sí mismo, le vamos a asignar al número 20 como el rival.

Por otro lado, el número 20 es el único de todos los equipos que alternará todas las fechas su condición de local. Todos los demás, repetirán necesariamente o bien la condición de local o la de visitante una vez.

Fecha 3: son los apareamientos que den o bien 4 o bien 23 (ya que 4 + 19 = 23).

En este caso, los partidos van a ser:

2–20
3–1
4–19

5–18
6–17
7–16
8–15
9–14
10–13
11–12

¿Quiere seguir usted? Hágalo. Inténtelo usted y tropiécese usted con las dificultades. En todo caso, yo escribo más abajo el resto para que usted lo pueda confrontar. Cada dificultad que usted descubra y que se proponga superar significará un paso más en la búsqueda de mejorar su capacidad de razonamiento.

Busque los patrones que se presentan, tanto en los casos en los que la fecha tiene como suma un número par o un número impar, y fíjese en las diferencias. Advierta cómo el número 20 es el único que alterna siempre la localía. Coteje lo que le dio. No se conforme con leer lo que escribí yo. Hágalo usted. Es la mejor manera de avanzar.

Ahora escribo en las columnas que siguen los partidos de las fechas que faltan, que son de la cuarta a la decimonovena, que tienen que sumar todos los números que van del 5 (o 24, que es 5 + 19), hasta la 20 (o 39, que es 20 + 19). Acá va:

5/24	6/25	7/26	8/27	9/28	10/29
2-3	3-20	3-4	4-20	4-5	5-20
1-4	4-2	2-5	5-3	3-6	6-4
19-5	5-1	1-6	6-2	2-7	7-3
18-6	6-19	19-7	7-1	1-8	8-2
17-7	7-18	18-8	8-19	19-9	9-1
16-8	8-17	17-9	9-18	18-10	10-19

15-9	9-16	16-10	10-17	17-11	11-18
14-10	10-15	15-11	11-16	16-12	12-17
13-11	11-14	14-12	12-15	15-13	13-16
20-12	12-13	20-13	13-14	20-14	14-15

11/30	12/31	13/32	14/33	15/34	16/35
5-6	6-20	6-7	7-20	7-8	8-20
4-7	7-5	5-8	8-6	6-9	9-7
3-8	8-4	4-9	9-5	5-10	10-6
2-9	9-3	3-10	10-4	4-11	11-5
1-10	10-2	2-11	11-3	3-12	12-4
19-11	11-1	1-12	12-2	2-13	13-3
18-12	12-19	19-13	13-1	1-14	14-2
17-13	13-18	18-14	14-19	19-15	15-1
16-14	14-17	17-15	15-18	18-16	16-19

17/36	18/37	19/38	20/39
8-9	9-20	9-10	10-20
7-10	10-8	8-11	11-9
6-11	11-7	7-12	12-8
5-12	12-6	6-13	13-7
4-13	13-5	5-14	14-6
3-14	14-4	4-15	15-5
2-15	15-3	3-16	16-4
1-16	16-2	2-17	17-3
19-17	17-1	1-18	18-2
20-18	18-19	20-19	19-1

Ahora que está todo completo, disfrute de buscar los patrones que se repiten. Vea cómo el número 20 va saltando de local a visitante, pero los demás tienen que repetir en algún momento. Más

aún, haga el siguiente ejercicio: elija cualquier equipo, digamos el 7 y recorra los rivales que enfrenta fecha tras fecha. Verá que da:

14-15-16-17-18-19-1-2-3-4-5-6-**20**-8-9-10-11-12-13

Es decir, en el momento que le tocaría jugar contra sí mismo, en esa fecha enfrenta al 20.

Hecho esto, ahora siga la trayectoria del número 13 (por poner cualquier otro ejemplo), y escriba los rivales sucesivos que tiene que enfrentar:

8-9-10-11-12-**20**-14-15-16-17-18-19-20-1-2-3-4-5-6-7

Otra vez, cuando le tocaría jugar contra sí mismo,[67] allí juega contra el 20. Pero lo interesante es que EL ORDEN en el que juega los partidos el 13 es el mismo que el orden que sigue el 7.

Fíjese ahora si eso sucede con todos los equipos.

Y, por último, decida usted qué simetrías le interesaron más y vea si puede hacer un patrón general que permita crear un fixture para *n* equipos, en donde *n* en este caso fue 20, pero que podría ser cualquiera.

Por otro lado, advierta que si uno sabe el programa de partidos de un equipo, en realidad, ¡sabe el de todos!

---

67. Le propondría que pensara cómo hacer un fixture cuando el número de equipos no es par, sino que es impar. Por ejemplo, si hubiera 21 equipos, ¿qué habría que hacer?, ¿cómo emular lo que hicimos en el caso anterior? Si usted intenta resolverlo, entenderá la importancia de haber reemplazado al equipo que tendría que jugar contra sí mismo por el número 20. Si se tuviera un número impar de equipos, en cada fecha habrá uno de ellos que quedará libre y, por lo tanto, ese día no jugará ningún partido. Pero justamente ése es el equipo que, al tener que elegirle rival, debería jugar contra sí mismo.

Todos siguen el mismo orden con la diferencia del partido de que juegan contra el número 20. Ese partido es el único que cambia (compruébelo).

Por último, como las parejas que son de la misma ciudad, o barrio, están separadas por 10 unidades, recorra los partidos que un equipo tiene que jugar y verá que el orden de los barrios o ciudades se respeta en el fixture también. Y si juega con uno de local, juega con el otro de visitante.

El único equipo que va jugando sucesivamente con los clásicos rivales (los que son de la misma ciudad) es el que lleva el número 20. Ése va jugando consecutivamente con cada uno de ellos, saltando de uno a otro, fecha por fecha.



Solución a "¿Cómo elegir una clave secreta?"

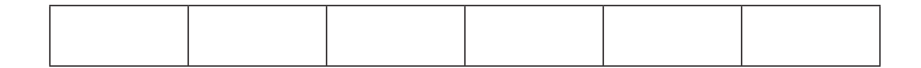
Antes de avanzar con la respuesta, quiero hacer una observación. Si usted (se) contestó o dedujo que lo mejor es elegir una clave de 6 dígitos distintos, me apresuro a decirle que esa respuesta se puede mejorar.

O sea, por supuesto que uno puede elegir una clave que consista de 6 dígitos distintos, pero le aseguro que hay más variantes si uno elige otro tipo de combinación.

Veamos. Calculemos juntos (usted y yo) cuántas posibles combinaciones hay que involucren 6 dígitos distintos.

Se trata, entonces, de contar cuántas maneras hay de distribuir los 6 dígitos en forma ordenada. Es decir, la clave 213456 no es lo mismo que 213465. Los dígitos involucrados son los mismos, pero el ORDEN los hace distintos.

Frente a eso, imagine que tenemos una fila con seis casilleros para llenar:



En los distintos episodios de mis libros ya vimos cómo hacer. Sin embargo, lo repito acá una vez más.

¿Cuántos dígitos pueden aparecer en el primer lugar? Allí pueden estar ubicados cualquiera de los seis dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

Una vez elegido el primer dígito que ocupará el primer casillero, ¿cuántas alternativas me quedan para el segundo? (La/lo dejo pensando sola/solo un instante.)

Sí, la respuesta es que quedan cinco posibilidades para ocuparlo. Por lo tanto, para cada elección del primer número hay cinco posibilidades para el segundo. Por lo tanto, en total hay

6 x 5 = 30 elecciones posibles para los dos primeros números.

Dicho esto, ¿cuántas posibilidades hay para el tercero? Como ya hemos elegido los dos primeros, entonces quedan cuatro dígitos disponibles, y tal como hice antes, para cada una de las 30 posibilidades que teníamos, ahora hay 4 posibles formas de elegir el tercer dígito.

En consecuencia, ahora hay:

(6 x 5) x 4 = 30 x 4 = 120 formas de elegir los primeros tres dígitos en forma ordenada.

De la misma manera, quedan tres posibilidades para el cuarto casillero, o sea:

$$(6 \times 5 \times 4) \times 3 = 120 \times 3 = 360$$

para los cuatro primeros casilleros, y quedan dos dígitos para el penúltimo. O sea,

$$(6 \times 5 \times 4 \times 3) \times 2 = 360 \times 2 = 720$$

posibilidades para elegir los primeros cinco dígitos. Y ya terminó el proceso, porque el último dígito queda predeterminado al haber elegido los cinco anteriores.

Moraleja (tal como vimos en *Matemática… ¿estás ahí? Episodio 100*, en el capítulo sobre los cuadrados de Bachet): si uno tiene 6 dígitos y quiere contar cuántas formas diferentes hay de ordenarlos el resultado es:

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Ya sabemos, entonces, que hay 720 posibilidades con seis dígitos diferentes. Recuerde que estamos tratando de ver cuántos dígitos diferentes debe tener una clave de 6 dígitos, para maximizar la cantidad de combinaciones posibles (y de esta forma, dificultarle la tarea a un potencial atacante).

Veamos qué pasa si uno usa nada más que 5 dígitos. Como la combinación involucra ocupar los seis casilleros está claro que uno de los dígitos tendrá que repetirse.

Supongamos entonces que los dígitos son: 1, 2, 3, 4, 5 y que el 5 está repetido dos veces. Justamente por eso los voy a llamar así:

1, 2, 3, 4, 5a y 5b

(después voy a analizar el caso en el que se repitan otros y no el 5).

Por lo tanto, es como si estuviera distinguiendo los dos números 5 y por eso los llamo 5a y 5b.

Como vimos recién, hay 6! = 720 formas de distribuirlos en forma ordenada, pero la diferencia está en que ahora no sabríamos cómo distinguir un 5 del otro. O sea, el 5a y 5b funcionan bien para poder contar en forma abstracta, pero a los efectos prácticos no tiene sentido decir 5a o 5b (sería mejor entonces dejarles el nombre que tienen: 5 y 6).

Por ejemplo, la combinación

1, 5a, 2, 4, 3, 5b

sería indistinguible para nosotros de esta otra:

1, 5b, 2, 4, 3, 5a

Nosotros estaríamos viendo dos veces este número: 1, 5, 2, 4, 3, 5.

Como esto sucede en todos los casos, esto implica que estamos contando dos veces cada forma de distribuirlos, y, por lo tanto, para calcular cuántos órdenes distintos hay, tenemos que dividir por 2 al total obtenido. Como este total es de 720, el resultado que uno tiene ahora es:

$$6!/2 = 720/2 = 360 \quad (*)$$

Si usted no me pudo seguir con el razonamiento anterior, la/lo invito a que vuelva a leer lo que está escrito. Haga usted casos más sencillos en donde en lugar de considerar números de 6

dígitos distintos, elija de 3 dígitos o de 4, de manera de poder descubrir (y superar) las dificultades que pudieran aparecer.

Vuelvo a lo que había hecho en (*). Es verdad que obtuvimos 360 como resultado, pero me estoy olvidando de algo si me quedo con este resultado (¿de qué?). Es de que estos 360 órdenes posibles se obtienen si uno repite al número 5.

Uno podría decir: ¿y por qué sólo se puede repetir el 5? ¿No hubiéramos podido repetir el 4? ¿O el 2?

La respuesta es que sí, que eso pudo haber sido posible. Por lo tanto, el número que obtuvimos (360) es el mismo que hubiéramos tenido si en lugar del 5, elegíamos el 4 como número repetido, o el 3, o el 2. O el 1. Luego, hay que multiplicar el número 360 por el número 5 (ya que hay cinco posibilidades de repetir un dígito).

Ahora sí, este número

$$360 \times 5 = 1.800$$

Conclusión (muy interesante): si bien parecía que lo mejor que uno podía hacer era elegir seis dígitos diferentes, hemos descubierto que si uno elige 5 cualesquiera y repite uno, hay más combinaciones posibles y, por lo tanto, tiene más posibilidades de que un potencial atacante no pueda descubrir la clave.

Esta historia no debería terminar acá porque, ¿quién dice que estas 1.800 combinaciones es lo mejor a lo que podemos llegar?

Bien podría pasar que elegir tres dígitos y eventuales repeticiones hasta formar un número de seis dígitos ofrezca un número de combinaciones más grande que 1.800. Por lo tanto, para despejar esta duda, lo que hay que hacer es calcular todas las otras posibilidades.

¿Cuáles son estas otras posibilidades?

1) Elegir 4 dígitos y permitir que haya uno repetido tres veces.
   a. 1, 2, 3, 4a, 4b y 4c;
   b. o bien, elegir 4 dígitos y permitir que haya dos repetidos dos veces: 1, 2, 3a, 3b, 4a, 4b.
2) Elegir 3 dígitos y tener:
   a. 1, 2, 3a, 3b, 3c, 3d
   b. 1, 2a, 2b, 3a, 3b, 3c
   c. 1a, 1b, 2a, 2b, 3a, 3b
3) Elegir 2 dígitos y tener:
   a. 1, 2a, 2b, 2c, 2d, 2e
   b. 1a, 1b, 2a, 2b, 2c, 2d
   c. 1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 2c
4) Elegir 1 dígito y tener entonces solamente *seis posibilidades*, que se obtienen repitiendo ese dígito las seis veces. Como hay seis dígitos hay seis posibilidades: 111111, 222222, 333333, 444444, 555555 y 666666.

No voy a escribir todos los casos, pero sí uno más como para dar una idea de lo que hay que hacer.

Analicemos el caso 1) a. con 4 dígitos con estas repeticiones: 1, 2, 3, 4a, 4b y 4c.

En total, si uno pudiera distinguir los distintos números 4, habría

$$6! = 720 \text{ combinaciones} \quad (**)$$

Pero los números 4 son indistinguibles. ¿Cuántas formas hay de intercambiar los números 4 entre sí de manera que no se note el orden en el que los elegimos? (Piénselo usted.)

Fíjese que se trata de contar entonces de cuántas formas se pueden ordenar los dígitos 4a, 4b y 4c (como si fueran distintos). Y como vimos más arriba, hay 3! = 6 formas de hacerlo.

Luego, volviendo a (**), hay que DIVIDIR las 720 combinaciones por el número 3! = 6.

O sea,

$$6!/3! = 720/6 = 120 \quad (***)$$

Sin embargo, hay que multiplicarlo por la cantidad de formas que hay de elegir los cuatro dígitos:

1, 2, 3, 4 repitiendo el 4
1, 2, 3, 4 repitiendo el 3
1, 2, 3, 4 repitiendo el 2 y
1, 2, 3, 4 repitiendo el 1.

En total, hay 4 formas distintas. Si uno multiplica (como aparece en la fórmula (***)) el número 120 x 4 = 480.

Escribo abajo, los resultados que se obtienen en todos los otros casos.

- Caso 1, 2, 3a, 3b, 4a, 4b. Acá hay 1.080 combinaciones. Si sumamos las 480 combinaciones que había en el caso anterior y estas 1.080, se obtiene un total de 1.560 posibilidades con 4 dígitos
- Caso 1, 2, 3a, 3b, 3c, 3d. Acá hay 90 posibilidades
- Caso 1, 2a, 2b, 3a, 3b, 3c. Acá hay 360 formas
- Caso 1a, 1b, 2a, 2b, 3a, 3b. Hay 90 maneras. En total, sumando todas las combinaciones posibles con 3 dígitos (90 + 360 + 90) = 540 formas
- Caso 1, 2a, 2b, 2c, 2d, 2e. Hay 12 posibilidades
- Caso 1a, 1b, 2a, 2b, 2c, 2d. Hay 30 formas
- Caso 1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 2c. Hay 20 maneras. En total, con 2 dígitos hay 62 combinaciones posibles

En definitiva, si uno dispone de seis dígitos y tiene que ocupar seis casilleros la mejor[68] estrategia posible consiste en elegir cinco cualesquiera y repetir uno de ellos. ¿No es notable este resultado?



Solución a "Caramelos para todos"

Antes de avanzar, le sugiero que pensemos juntos la siguiente situación (que simplifico adrede para entender qué pasa).

Supongamos que hay cuatro alumnos sentados en un círculo, y que cada uno de ellos tiene ocho caramelos.

Es decir, empiezo por un caso hipersencillo. ¿Qué pasa en el momento que la maestra aplaude por primera vez? (piense usted antes de seguir leyendo). Lo que sucede es que como todos tienen ocho caramelos y cada uno tiene que entregarle cuatro (la mitad) al compañero que tiene a su derecha, pero a su vez, recibe cuatro de quien tiene a la izquierda, ¡el número de caramelos que tiene cada alumno, sigue siendo ocho!

Por supuesto, si uno repitiera el proceso volvería a quedar todo igual: cada alumno seguiría teniendo ocho caramelos.

Usted estará de acuerdo conmigo en que la conclusión a la que llegamos recién se mantiene independientemente del número de alumnos, si cada uno empieza con ocho caramelos, o con cualquier número par de caramelos (siempre y cuando sea el mismo para todos).

---

68. Entiendo como mejor estrategia la que provee más casos posibles entre los cuales elegir.

En consecuencia, si al "iterar" (repetir) el proceso que escribí más arriba llegáramos a la posición en donde todos los participantes tienen el mismo número de caramelos, entonces, no vale la pena seguir, porque cualquier paso posterior que uno emprenda no altera el resultado.

Por último, créame que este problema requiere que usted intente tratar de resolverlo sola/solo. Haga muchos ejemplos, trate de ver si descubre qué pasa. Y cuando lo descubra se va a sentir muy bien. Después vendrá el otro paso, que será preguntarse: ¿pasará esto siempre?

Ahora sí, escribo la solución.

"No importa cuántos alumnos haya originalmente y no interesa el número de caramelos que tenga cada uno, en un número finito de pasos todos terminarán con el mismo número de caramelos en sus manos. En ese momento, no vale la pena seguir con el proceso porque a partir de allí todos se quedarán con ese número."

Así como está escrito más arriba es como figura en el libro original. Yo no quise escribir el resultado de entrada porque me parece que vale la pena experimentar con casos particulares hasta terminar conjeturando lo que tiene que pasar al final.

Ahora sí, ¿cómo demostrarlo? Es decir, ¿cómo demostrar que independientemente del número de alumnos y de la cantidad de caramelos que cada uno tenga, en un número finito de pasos todos terminarán con el mismo número de caramelos?

Para esto necesito hacer algunas observaciones. La/lo invito a que me siga y cuando le parece que no me entiende, se detenga y repiense lo que leyó. No se frustre porque no vale la pena. Es muy posible que si no me pudo seguir dependa más de mi mala redacción que de su capacidad para entender.

Una última acotación: voy a proponer un ejemplo en particu-

lar para encontrar junto a usted la solución. Usted verá que todos los pasos que hacemos juntos, se pueden replicar en cualquier otro caso.

El ejemplo que voy a considerar es el siguiente. Supongamos que uno tiene ocho estudiantes con esta distribución de caramelos:

(12, 40, 40, 8, 8, 8, 16, 40)   (*)

Como están dispuestos en forma circular, esto presume que, en realidad, el último estudiante en la tira de arriba (*), que tiene 40 caramelos, tiene sentado a su derecha al que tiene 12 caramelos. O sea, sería una distribución así:

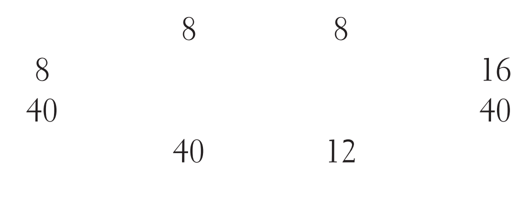


Figura 1

Es decir, imagine una mesa en la que la distribución de estudiantes es la que aparece en la Figura 1.

Observe que siempre tiene que haber al menos un estudiante que tenga la menor cantidad de caramelos (en este caso son ocho) y otro/s que tenga/n la mayor cantidad de caramelos (en este caso son 40).

Quiero que nos convenzamos juntos de un par de hechos que suceden una vez finalizado cada paso de la iteración:

a) que el número máximo de caramelos que tendrá cualquier alumno (al empezar es de 40) no puede aumentar. A lo sumo, permanecerá igual;
b) que el número mínimo de caramelos que tengan todos los estudiantes nunca puede ser menor que 8;
c) y que al menos **uno** de los estudiantes que tiene el mínimo número de caramelos (al empezar es de 8) aumenta esa cantidad.

¿Cómo demostrar cada afirmación? ¿No le dan ganas de pensarlas usted? Acá voy yo.

a) ¿Podría aumentar de 40 el número de caramelos que tenga algún alumno? Si un alumno ya tiene 40 antes de hacer la primera iteración, como es el que más tiene, los que él reciba serán 20 (si provienen de alguien que también tenía 40) o bien menos. Luego, como él tendrá que ceder 20 de los suyos, no puede aumentar los 40 que tenía originalmente. Es decir, cualquiera de los que tiene 40, o bien sigue teniendo 40 luego del primer paso, o bien tiene menos.
b) ¿Podría algún estudiante tener menos de 8 caramelos luego de una iteración? La respuesta es que no. ¿Por qué? Porque en cada paso él tendrá que ceder 4 de sus caramelos (ya que entrega la mitad de los que tiene), pero tendrá que recibir la mitad de los que tiene el que está a su izquierda, y como ese estudiante no puede tener menos que 8 (ya que 8 era el mínimo), le entregará entonces por lo menos otros 4 caramelos (o más). Luego, en total, tendrá por lo menos 8 caramelos. Esto dice que el número mínimo de caramelos no puede disminuir de 8 en el primer paso.

c) ¿Por qué al menos **uno** de los estudiantes que tenía 8 caramelos al principio tendrá que terminar con más de 8 caramelos en la primera iteración? Ya sabemos por (b) que ninguno tendrá menos de 8 pero como alguno de los que tienen 8 tiene sentado a su izquierda a algún estudiante que tenga más de 8,[69] ése le tendrá que dar más de 4 caramelos. Cuando los sume a los cuatro con los que él se quedará, ese número sumará más de 8, y, por lo tanto, si es un número par, se quedará con ellos y si es impar, la maestra le va a dar un caramelo más. En cualquier caso, terminará con más de 8. En el caso que nos ocupa, uno de los que tiene 8 caramelos, tiene sentado a su izquierda al que tiene 16. En la primera iteración, él cederá 4 de los que tiene, pero va a recibir 8 del que tiene 16. Sumados, le darán 12.

Luego de estas tres observaciones, estamos en condiciones de resolver el problema. ¿Por qué? Acompáñeme en este razonamiento.

En cada paso, el máximo no aumenta: es siempre (a lo sumo) 40.

En cada paso, uno de los que tiene el número mínimo, sube el número de caramelos. Es decir, al menos uno de los que tiene 8, tiene que tener más. Eso dice que, en el siguiente paso, algún otro que tenga el número mínimo, lo tendrá que aumentar.

---

69. Tiene que haber algún estudiante que tenga más que 8 caramelos en alguna parte a la izquierda de alguno de los que tienen 8 porque, si no, todos tendrían 8 y estamos suponiendo que no todos tienen el mismo número de caramelos. En el ejemplo que estamos analizando hay uno de los estudiantes que tiene 8 caramelos que tiene sentado a su izquierda a uno que tiene 16.

Por otro lado, el número mínimo de caramelos nunca podrá ser menor que 8. Y como recién vimos que ese número tiene que aumentar en al menos uno de los estudiantes, llegará un momento en el que cuando solamente uno de ellos tenga 8, al siguiente paso el mínimo tendrá que haber aumentado.

Y esta es la clave: el número máximo no puede aumentar de 40, y el mínimo tendrá que aumentar en algún momento. En consecuencia, luego de un número finito de pasos, ¡el número mínimo tendrá que llegar a alcanzar al número máximo!

Y cuando eso suceda, se termina el problema, porque cuando el mínimo alcanza al máximo significa que todos tienen el mismo número de caramelos. ¡Y listo!

Como usted advierte, el hecho de que yo hubiera elegido 40 como máximo y 8 como mínimo poca importancia tiene. Todas las observaciones se pueden seguir haciendo con cualquier número de estudiantes y cualquier distribución de caramelos. Y creo que usted coincidirá conmigo en que el problema es sencillo, ilustrativo, interesante y además educa sobre cómo se puede usar una herramienta tan potente como las iteraciones para resolver un problema… Sí, de matemática también… aunque parezca un juego.



Solución a "Años al cuadrado"

Ambos (Marcela y Gerardo) están sosteniendo la conversación en el año 2001, y tenían menos de 60 años.

Piense conmigo en los números que corresponden a los años de los siglos XIX y XX. ¿Cuáles de ellos son cuadrados?

Es decir, ¿cuáles de ellos resultan de elevar al cuadrado algún número?

Por ejemplo, $40^2 = 40 \times 40 = 1600$.

Obviamente, 1.600 está fuera de consideración porque, si no, el padre de Marcela habría vivido más de 400 años. Luego, $40^2 = 1600$ queda excluido.

Sin embargo, voy a seguir avanzando en los cuadrados:

$$40^2 = 1600$$
$$41^2 = 1681$$
$$42^2 = 1764$$
$$43^2 = 1849 \qquad (*)$$
$$44^2 = 1936$$
$$45^2 = 2025$$
$$46^2 = 2116$$

Voy a descartar inmediatamente los primeros cuatro números. Es decir, si uno quisiera saber el año de nacimiento del padre de Marcela, tendría que restar:

$$1600 - 40 = 1560$$
$$1681 - 41 = 1640$$
$$1764 - 42 = 1722$$
$$1849 - 43 = 1806$$

Obviamente, el único que podría estar cerca es el último, pero si el señor hubiera nacido en 1806, como Marcela dice que su padre vivió 100 años, eso significa que habría fallecido en 1906. Por lo tanto, Marcela no podría tener menos de 60 años y, además, haber vivido en el final de 2001 (cuando estaba conversando con Gerardo).

Sigo avanzando ahora con los restantes números que figuran en la lista (*). Voy a calcular los años de nacimiento (potenciales) para el padre de Marcela y para Gerardo:

$$1936 - 44 = 1892$$
$$2025 - 45 = 1980$$
$$2116 - 46 = 2070$$

¿Cómo interpretar estos números ahora?

En principio, hay que descartar también el último, porque Gerardo no pudo haber nacido en el 2070, ni muchos menos el padre de Marcela.

Luego, las únicas alternativas posibles son: 1892 para el padre de Marcela y 1980 para Gerardo.

Veamos si se genera alguna contradicción. Si el señor nació en 1892 y vivió 100 años, no hay problemas porque puede ser perfectamente el padre de Marcela. Cuando cumplió 44 años, el cuadrado de su edad fue 1936 y eso se compadece perfectamente con lo que estoy buscando.

Por otro lado, si Gerardo nació en 1980, cuando cumpla 45 años, el año 2025 será exactamente el cuadrado de su edad.

Eso resuelve el problema.



Solución a "El problema de D'Andrea"

¿Cómo hacer para convencerse de que cualesquiera sean los doce números que usted eligió, siempre hay dos cuya suma está entre los números que usted separó?

Voy a llamar:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11} \text{ y } a_{12}$$

a los doce números elegidos entre los primeros veinte. Además, como son todos números distintos, puedo suponer que están ordenados en forma creciente. Es decir, puedo suponer que se verifica:

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8 < a_9 < a_{10} < a_{11} < a_{12}$$

Más aún, voy a meter todos esos números en una bolsa que voy a llamar "A".

O sea, A es un conjunto que contiene a esos doce números.

¿Cuántos números entre los primeros 20 no fueron elegidos? Exactamente ocho. Los doce restantes están en A.

Fabriquemos ahora los números que resultan de restarle a_1 a cada uno de los otros números que elegí (sígame, no se pierda porque todo es muy sencillo, pero no quiero que se transforme en una sopa de letras).

$$\begin{array}{ll} a_{12} - a_1 & \\ a_{11} - a_1 & \\ a_{10} - a_1 & \\ a_9 - a_1 & \\ a_8 - a_1 & \\ a_7 - a_1 & (*) \\ a_6 - a_1 & \\ a_5 - a_1 & \\ a_4 - a_1 & \\ a_3 - a_1 & \\ a_2 - a_1 & \end{array}$$

Estos once números son todos menores que 20, y son todos **distintos**.

Ahora, fíjese en este razonamiento: de los primeros 20 números (1, 2, 3, 4, 5, 6…, 18, 19, 20), sabemos que hay 12 que están en A (a_1, a_2, a_3… , $a_{10,}$ a_{11} y a_{12}). Luego, afuera de A quedan *ocho*.

Por lo tanto, de los once números que figuran en (*), tiene que haber por lo menos tres que están en A.

A los efectos de seguir con la argumentación (y sin que esto modifique nada) supongamos que son $(a_2 - a_1)$, $(a_7 - a_1)$ y $(a_{11} - a_1)$.[70]

Luego, como estos tres números tienen que estar en A, digamos que

$$(a_{11} - a_1) = a_5$$ [71]

Esto dice entonces que

$$a_{11} = a_1 + a_5$$ [72]

y eso es justamente lo que queríamos probar: que teníamos que poder encontrar que la suma de dos de los números de A era un número que estaba en A.

---

70. Elegí estos tres números pero podría haber sido cualquier otra combinación de la forma $(a_n - a_1)$, en donde el número n es un número cualquiera mayor o igual que 2, y menor o igual que 12.

71. También aquí hice una elección arbitraria: puse que $(a_{11} - a_1) = a_5$, pero puede haber resultado que $(a_{11} - a_1) = a_3$ o $(a_{11} - a_1) = a_6$. Lo que importa es que tiene que haber alguno de los a_n tal que $(a_{11} - a_1) = a_n$.

72. Lo importante de saber que hay por lo menos tres números de la forma $(a_n - a_1)$ que tienen que pertenecer al conjunto A, es que al menos dos de ellos no pueden coincidir con a_1 (porque son todos distintos). Si alguno de ellos coincidiera con $(a_{11} - a_1) = a_1$ entonces, resultaría $a_{11} = 2\ a_1$, lo que no me permitiría conseguir lo que quiero, que es probar que la suma de dos números distintos de los que figuran en A resulta ser otro de los números de A.

LÓGICA

La isla de los ojos celestes*

La vida cotidiana nos pone ante situaciones en las que hay que decidir. Decidir rápido, decidir con compromiso, decidir racionalmente, decidir con pasión, decidir pensando en el futuro, decidir sobre si tener un hijo ahora o no, si casarnos o no, si comprar este departamento o no, si hacer esta inversión o no, si seguir esta carrera o no. Podría seguir, obviamente, pero estoy seguro de que la lista suya tomaría por distintas direcciones. El hecho es que uno está constantemente expuesto a decidir.

Pero para tomar decisiones elaboradas, educadas, racionales, hace falta tener datos. Y si fuera posible, la mayor cantidad de datos. Hasta para patear un penal hacen falta datos. ¿Qué sabe mi interlocutor sobre mí que yo no sé que él sabe? ¿Qué sé yo sobre él que él no sabe que yo sé? ¿Cómo usar esa información en beneficio propio?

La matemática, aunque no parezca, ofrece herramientas para tratar estos temas. No son infalibles ni categóricas (en general), pero le dan claramente una ventaja al otro si él las tiene y yo no. Y ni hablar si yo las conozco y ese otro no.

---

*Este problema fue publicado en el diario *Página/12* el 5 de febrero de 2011.

A lo que me quiero referir es a lo que se llama "conocimiento común". Ya verá de qué estoy hablando. Lo voy a hacer con un ejemplo muy conocido, muy divulgado y muy útil. Hay múltiples variantes de lo que se conoce con el nombre de "Ojos celestes en la isla".[73] Acá es donde quiero hacerle una breve advertencia: lo que sigue es un maravilloso juego de lógica. No hace falta saber nada. No hace falta haber estudiado nada. No hace falta más que la capacidad para razonar que viene incluida en el *software* que trae nuestro cerebro. La/lo invito a usarlo. Verá que vale la pena. Si no se le ocurre la respuesta ahora, no tiene importancia. Mantenga con usted mismo una discusión interna. Téngase paciencia.

Todo lo que sigue es —obviamente— ficticio. Se trata de una situación ideal, producto de la imaginación. Eso sí, lea las reglas con cuidado, porque son importantes para decidir qué hay que contestar.

Acá va: en una isla hay 100 habitantes.[74] Todos ellos tienen o bien ojos celestes o bien ojos marrones. Todos ven el color de los ojos de los otros, pero no el color propio. Está prohibido hablar entre ellos de ese tema. No hay espejos ni trampas posibles. Eso sí, hay una ley en la isla que establece que si alguien descubre que tiene ojos celestes, tiene que abandonar la isla inexorablemente a las 8 de la mañana del

---

73. La versión que figura acá es una de las más sencillas que ofrece la literatura. Hay muchísimas fuentes que hablan sobre el "conocimiento común" o compartido. Cualquier libro que profundice un poco en la Teoría de Juegos tiene un capítulo dedicado al "Problema de los ojos celestes en la isla".

74. No hace falta que sean 100 habitantes. Elegí un número cualquiera, pero el razonamiento que se usa para encontrar la solución transforma en irrelevante el número inicial de personas que habitan la isla.

día siguiente. Todos los pobladores tienen la misma capacidad para razonar y todos son capaces de usar una lógica impecable.[75]

Un día, una persona que llega de visita a la isla mientras los mira a todos dice: "¡Qué bueno es ver al menos una persona con ojos celestes después de tanto tiempo de estar en alta mar!".

Ahora le toca pensar a usted: ¿qué consecuencias trajo esta frase entre los habitantes de la isla? Es decir, una vez que los pobladores escucharon al visitante decir que había al menos uno de ellos que tenía ojos celestes, ¿qué cree usted que pasó después?

(Las respuestas, en la página 275)

75. Una variante interesante del problema es imponer como condición que no sólo abandonen la isla aquellos que descubren que tienen ojos celestes, sino que abandonen la isla todos aquellos que descubran el color de ojos que tienen, sea éste marrón o celeste.

Las algas usan medias rojas*

Viernes por la noche. Hora pico. Mucha gente mirando. El periodista (de televisión) mira fijo a la cámara y dice —luego de consultar sus papeles—:

"Los datos que nos da el Servicio Meteorológico Nacional son los siguientes. Para el sábado hay un 50% de posibilidades de que llueva. Lo mismo para el domingo, 50% de posibilidades de lluvia".

Deja sus papeles apoyados arriba del escritorio y ofrece una conclusión. "En consecuencia, las chances de que llueva este fin de semana son de un 100%."

Se sonrió, como quien cree haber hecho un aporte valioso y le dejó lugar a su compañera para que siguiera con otras noticias.

Esta historia, que parece descabellada, la publicó hace muchos años (en 1988) John Allen Paulos en uno de sus primeros (y deliciosos) libros: *Innumeracy* ("El nombre anumérico").

---

*Este texto —aquí editado— fue publicado en el diario *Página/12* el domingo 30 de mayo de 2010.

El error del periodista parece obvio. Su conclusión, ciertamente equivocada, casi cómica, o tragicómica.

En casos tan flagrantes es fácil advertir el error (¿o no?). Pero, en otros, ¿pasa lo mismo?

Fíjese en este ejemplo. Lea las frases que figuran más abajo. Son cuatro. Luego, hay una conclusión. Léala también. Y deténgase allí. No siga sin pensar sola/solo. No hay nadie que lo vea leyendo este libro. Más aún, si su deducción es correcta o falsa poco importa. En todo caso, lo único que yo valoraría es el tiempo que usted le dedique a pensarlo.

Acá van las frases.

1) Las algas usan medias rojas.
2) Todo objeto o animal o persona que usa desodorante sabe tocar el saxo.
3) Todo lo que eche humo usa desodorante.
4) Nada ni nadie que use medias rojas puede tocar el saxo.

En consecuencia, se deduce que:

“Las algas echan humo”.

¿Es correcta esta conclusión?

Yo sé que cuando uno va leyendo las distintas frases no puede menos que pensar “¿de qué está hablando este tipo?, se volvió loco”. Y tendría razón.

Peor aún, ¿qué sentido tiene preguntarse si hay algas que echan humo, o usan medias rojas o a quién le importa lo que hacen con el desodorante?

Sin embargo, todo lo que antecede sí tiene sentido. En todo

caso, lo que no tiene es EL sentido que nosotros queremos darle si uno piensa en lo que realmente significa echar humo, usar medias (rojas o no), desodorantes, tocar el saxo, etcétera.

Todas estas palabras están llenas del contenido que la cultura (o el idioma) les da, pero… pero si uno fuera capaz de quitarles el significado, entonces podríamos avanzar en una nueva dirección.

Y, además, aprovechar para usar un poco de matemática en el camino. De estas situaciones está llena la vida cotidiana, llena. El problema es que no nos damos cuenta necesariamente, y, por lo tanto, sacamos conclusiones que desafían a la lógica. ¿O no?

La/lo invito entonces a que relea las frases y que piense si es posible que la conclusión sea verdadera. Es decir, si establecidas las reglas que imponen las frases, lo que se infiere es acertado o equivocado.

(La respuesta, en la página 277)

¿Cuántas formas hay de construir un dado con un cubo cuyas seis caras están pintadas de seis colores distintos?

Suponga que tiene un cubo de manera tal que cada lado o cara está pintada de un color diferente. El objetivo es tratar de construir un dado. Como usted sabe un dado tiene distribuidos los números del 1 al 6, pero no de cualquier forma. Es decir, las caras opuestas tienen que sumar siete.

Por lo tanto, detrás del 1 tiene que haber un 6, la cara opuesta a un 2 tiene que tener al número 5 y, por último, los lados que tengan al 3 y el 4 también tienen que ser opuestos.

Dicho esto, si uno tiene el cubo original, ¿de cuántas formas se pueden asignar los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 de manera tal de obtener un dado con las restricciones que figuran más arriba?

(La respuesta, en la página 279)

¿Quién mira a quién?*

Ya hablamos de Peter Winkler, un matemático norteamericano nacido en 1946 y uno de los especialistas más importantes del mundo en matemática recreativa. Es la matemática que yo creo que tendría que tener una fuerte inserción en los primeros estadios de la formación de nuestros niños y en la educación secundaria también.

El problema que voy a presentar más abajo es entretenido y sencillo. No es la versión original que presenta Winkler, sino una adaptación mía, pero los cambios son irrelevantes. Eso sí, el propio Winkler cuenta que él lo encontró en la Sexta Competencia de Matemática de la ex Unión Soviética que se realizó en Voronezh en 1966.[76]

Supongo que si usted comparte la percepción de la mayoría de la gente de que todo lo que tenga que ver con la matemática es abstracto, duro y no hecho para mí, entonces es posible que

---

*Este texto fue publicado en *Página/12* el 18 de agosto de 2010.

76. La referencia aparece en el libro *Mathematical Puzzles*, cuyo autor es el matemático norteamericano Peter Winkler. La versión original se llama "Soldados en el campo (de batalla)". Lo cambié por estudiantes en un recreo porque todavía conservo el rechazo por todo lo que tenga que ver con soldados, campos de batalla, guerra y demás sinónimos.

decida no avanzar con el texto que sigue. Pero se perderá la oportunidad de entretenerse y de pensar. ¿Tiene algo mucho más importante para hacer? Si es así, déjelo para después pero no lo abandone, porque se privará de darse la oportunidad de sentirse bien con usted mismo.

Acá va: "Un número IMPAR de alumnos de una escuela están distribuidos en el patio en el momento de un recreo. Sin embargo, la distribución no es cualquiera: todas las distancias entre pares de estudiantes son números distintos. Es decir, si por ejemplo hay dos niños que están a un metro de distancia, no puede haber ningún otro par de alumnos que también estén a un metro exactamente.

La maestra les pide a todos que concentren la vista en el compañero que tengan más cerca. *El problema consiste en demostrar que tiene que haber al menos un estudiante al que no lo mira nadie*".

Como usted advierte, el planteo es realmente muy sencillo: un número impar de chicos distribuidos en el patio de una escuela, todos a distancias distintas entre sí y todos tienen que mirar al que más cerca tienen. Todo lo que hay que hacer es demostrar que sea cual fuere la disposición de los chicos, siempre tiene que haber al menos uno al que no lo está mirando nadie.

¿Tiene que ver esto con la matemática? Respuesta apurada: ¡sí! Esto es parte de la matemática. Claro que no tiene nada que ver con ángulos opuestos por el vértice ni casos de factoreo ni de sacar paréntesis ni de sumar fracciones. Pero es parte de la matemática recreativa, la que —creo— debería explorarse y explotarse más en las escuelas y los colegios para luchar contra la percepción instalada (y con absoluta razón) de que la matemática que se enseña está totalmente desligada de la realidad.

Por supuesto que no se me escapa que el problema en sí mis-

mo, así como lo planteé, es virtualmente imposible que suceda en la vida cotidiana: ¿quién va a distribuir un número impar de chicos en un colegio cuidándose de que todos estén a distintas distancias y mirando al que uno tiene más cerca? Respuesta obvia: nadie.

Pero la diferencia está en que pensar problemas de este tipo no sólo es entretenido/divertido, sino que, además, permite desarrollar estrategias que quizás parezcan sólo útiles para este problema en particular, pero que yo creo que abre caminos para problemas futuros, para la vida de todos los días. La mayoría de nosotros tiene que tomar decisiones cotidianamente, tiene que evaluar opciones, opinar… y la matemática es la fuente natural para entrenarse.

Más allá de la digresión, le sugiero que piense el problema porque vale la pena. Y no hay apuro. No lea la solución si no le dedicó un rato. En fin, usted decide.

(La respuesta, en la página 280)

Solución a "La isla de los ojos celestes"

¿Qué pudo haber pasado? Veamos. Por lo que dijo el visitante, por lo menos una de las personas que están en la isla tiene ojos celestes. ¿Qué pasaría si hubiera exactamente uno solo? (No siga leyendo, piense usted qué le pasaría a esta persona.)

Sigo yo: esta persona (la que tiene ojos celestes, pero no sabía que los tenía hasta allí) ve que los otros 99 habitantes de la isla tienen ojos marrones. Por lo tanto, a la mañana siguiente, a las 8, tiene que dejar la isla. Es que al saber que hay al menos uno de los pobladores que tiene ojos celestes y él ve 99 que tienen ojos marrones, él tiene que ser el de los ojos claros. Y allí termina todo.

¿Qué pasaría si hubiera exactamente dos personas que tienen ojos celestes? Llamémoslas A y B. Podría pasar lo siguiente: A piensa que el visitante se estaba refiriendo al color de ojos de B. Y B, pensaría lo mismo, o sea, que el señor que habló se refería a A y no a él. Ambos ven que hay 98 que tienen ojos marrones y uno que tiene ojos celestes, pero nada saben sobre el color de ojos propios. Pero a las 8 de la mañana del día siguiente, B advierte que A no se fue de la isla. Entonces, eso significa que A ve que hay otra persona en la isla que tiene ojos celestes. Y como B observa que hay 98 que tienen ojos marrones y sabe que A tiene ojos celestes, entonces, no queda más remedio que él mismo (B) tiene que tener ojos celestes. Por lo tanto, a las 8 de la mañana del segundo día, B se va de la isla.

Y de la misma forma, este razonamiento que hice para B, es válido para A. Luego, como consecuencia de lo que dijo el visitante, al segundo día de haber hablado enfrente de todos, se van los dos habitantes con ojos celestes.

Moraleja (hasta acá): Si en la isla hubiera exactamente dos

habitantes con ojos celestes, los dos se tienen que ir al segundo día de haber escuchado al visitante.

Un paso más: ¿y si hubiera exactamente tres que tienen ojos celestes? (¿No le dan ganas de pensar a usted sola/solo?)

Llamemos A, B y C a los tres que tienen ojos celestes. Tomemos a uno cualquiera de los tres, digamos A e imaginemos lo que tiene que estar pensando. A observa que B y C tienen ojos celestes. También ve que los otros 97 pobladores tienen ojos marrones. O sea, A sabe que hay dos con ojos celestes, 97 con marrones y lo que no sabe es el color de ojos que tiene él. Pero el dato que ahora tiene es el que vimos más arriba: si hay exactamente dos habitantes que tienen ojos celestes en la isla, entonces a las 8 de la mañana del segundo día de haber escuchado al visitante, tienen que irse de la isla.

Cuando A advierte que ni B ni C se fueron de la isla al pasar el segundo día, eso únicamente pudo haber pasado si hay más de dos pobladores que tienen ojos celestes. Y como los 97 restantes tienen ojos marrones, no queda más remedio que descubrir que es él, A, el que tiene los ojos celestes. Luego, a las 8 de la mañana del tercer día, A se va de la isla.

Y como el mismo razonamiento vale para B y para C, la conclusión es que si hay exactamente tres habitantes en la isla que tienen ojos celestes, entonces al tercer día de haber escuchado al visitante, abandonan la isla.

Como usted advierte, este razonamiento se puede seguir haciendo en el caso de que haya cuatro, cinco, hasta 100 habitantes con ojos celestes. El resultado será el mismo. Por ejemplo, si hay exactamente 37 pobladores con ojos celestes, al llegar el día 37 después desde que hablara el visitante, esas 37 personas se irán de la isla. No antes, pero tampoco después.

Reflexión final: Todo esto que figura más arriba parece un

juego. En realidad, lo es, pero no tanto. Hasta que llegó el visitante todo el mundo veía el color de ojos de todo el mundo y eso no cambió. Pero el dato adicional que esta persona proporcionó cambió totalmente el escenario de la isla. No sólo ahora todos saben que al menos uno tiene ojos celestes, sino que conforme van pasando los días, en la medida que nadie abandone la isla, va diciendo cuántos son los que tienen ojos celestes. Y, obviamente, tiene que llegar un momento en el que se tengan que ir todos los que tienen ese color de ojos.

En la vida cotidiana no alcanza con saber algo. Importa también saber qué es lo que saben los demás y poder descubrir no sólo cómo usarlo en beneficio propio, sino saber descubrir qué hará el otro con ese conocimiento que tiene. Esto es lo que se llama el "conocimiento común": no bien el visitante habló y les comunicó a todos que había al menos un habitante que tenía ojos celestes, esa información pasó a ser de público conocimiento y cambió todo el escenario.

Aunque no lo parezca, aprender a razonar de esta forma es hacer matemática también. En todo caso, es una lástima que este hecho no sea de conocimiento común.



Solución a "Las algas usan medias rojas"

Me apuro a decir que la conclusión es equivocada. ¿Por qué?

Lo que voy a hacer es suponer que es cierta (la conclusión) y mostrar que eso implicaría llegar a una contradicción. Esta es una herramienta muy útil y no necesariamente bien explotada en la vida cotidiana: suponer que lo que se quiere demostrar es

cierto y, llegado el caso, arribar a un absurdo. En este caso, lo que uno supuso inicialmente es equivocado.[77]

Supongamos, entonces, que las algas echan humo, y mi propósito es que nos convenzamos juntos (usted y yo) de que hay algo que no cierra o que genera una contradicción. Inténtelo usted por su cuenta. Si no, lea lo que sigue más abajo.

Tenga a mano las cuatro frases y la conclusión.

Sigo: si las algas echaran humo, por la frase número 3, querría decir que las algas usarían desodorante (lea lo que dice la frase 3: "Cualquier cosa que echa humo usa desodorante").

Luego, por la frase 2, "Todo objeto o animal o persona que usa desodorante sabe tocar el saxo". Como decimos que las algas, por el hecho de echar humo, usan desodorante (frase 3) y todo lo que usa desodorante sabe tocar el saxo (frase 2), entonces eso indica que que las algas saben tocar el saxo.

Paro acá por un instante: acabamos de demostrar que si fuera cierto que las algas echaran humo, entonces, sabrían tocar el saxo. (*)

Pero, por otro lado, la frase 1 dice que "Las algas usan medias rojas" y la 4 afirma que nada ni nadie que use medias rojas puede tocar el saxo. O sea, las algas no pueden tocar el saxo. (**)

Entonces, si uno junta las dos afirmaciones (*) y (**) descubre, por un lado, que las algas deberían saber tocar el saxo y, por otro lado, que no pueden tocar el saxo. Eso es una contradicción.

---

77. El extraordinario matemático inglés G. H. Hardy (1877-1947) escribió sobre la "prueba por contradicción" o lo que se conoce también como la "demostración por el absurdo". Se trata de una de las herramientas más finas de los matemáticos. En el ajedrez muchas veces uno apela a sacrificar una pieza (un peón, un caballo, un alfil, incluso la dama) con el objeto de mejorar su posición. El matemático, en cambio, en el afán de probar que tiene razón está dispuesto a sacrificar la partida.

Esta contradicción provino de suponer que era cierto que "las algas echan humo". Por lo tanto, no echan humo y la frase es falsa.

Moraleja: Es obvio que uno no tendrá que enfrentarse en su vida ni con algas que echen humo, ni que usen medias rojas ni que se pongan desodorante. Pero aunque parezca todo irrelevante, créame que en la vida cotidiana este tipo de situaciones aparece mucho más frecuentemente que lo que usted se imagina. Y conviene estar preparado. O educado, como prefiera.



Solución a "¿Cuántas formas hay de construir un dado con un cubo...?"

El problema consiste en contar adecuadamente la forma de distribuir los números en las seis caras. En todo caso, las restricciones son las que tienen que cumplir las caras opuestas del cubo. Es decir, los lados opuestos tienen que tener:

1 y 6
2 y 5
3 y 4.

Por lo tanto, esto enseña que una vez que uno elige una cara para el número 1 (por ejemplo) ya no tiene más libertad para poner al número 6: ¡tiene que ir en la cara opuesta a la que eligió para el 1!

De la misma forma, elegir un lugar para el 2, condena al 5 y lo mismo con el 3 y el 4.

Ahora podemos empezar a contar juntos. ¿De cuántas formas se puede ubicar al número 1? Como todavía no hay ningún número en el cubo, la libertad es completa: hay seis posibles lugares. Una vez elegido el lugar para el 1, como decía más arriba, del otro lado tiene que haber un 6.

Ahora quedan cuatro caras por llenar. Es decir, para cada una de las seis formas de ubicar el número 1, hay cuatro formas de distribuir el número 2 (y por lo tanto el 5).

O sea, hasta acá, hay 6 x 4 = 24 formas de distribuir al 1, 6, 2 y 5.

En cada uno de estos 24 casos quedan dos caras libres. Por lo tanto, el 3 puede ir en cualquiera de las dos (y por lo tanto al número 4 no le queda más remedio que ubicarse en la cara opuesta): o sea, 24 x 2 = 48.

Moraleja: Hay 6 x 4 x 2 = 48 formas de construirse un dado.[78]



Solución a "¿Quién mira a quién?"

Por las dudas, aquí va la solución.

El número de estudiantes involucrados es un número impar cualquiera. A los efectos de hacer más visible el razonamiento, voy a suponer que hay 11 alumnos, pero el argumento funciona exactamente igual para cualquier número impar.

La primera cosa que quiero hacer es mostrarle que si hay dos

---

78. Vale la pena enfatizar, una vez más, que se trata de un cubo con todas las caras pintadas de distintos colores. Si así no fuera, la cantidad total se reduciría a 4 x 2 = 8 formas.

alumnos (o más) que están mirando al mismo entonces el problema está resuelto (¿quiere pensarlo usted por su cuenta?).

Es que si hay dos alumnos mirando al mismo, eso quiere decir que hay nueve de los once que no sabemos a quién miran. Pero como quedan diez (de los once) por ser mirados, entonces, hay 9 que tendrían que mirar a 10. Esto es imposible. Luego, al menos uno de los alumnos no es observado por nadie. Y eso es lo que queríamos demostrar.

Moraleja 1: Si hay dos (o más) niños mirando al mismo entonces el problema está resuelto.

En lo que sigue, entonces, voy a suponer que cada niño es mirado a lo sumo por un solo compañero. Y aún así voy a tratar de convencerla/lo de que hay un niño que no es mirado por nadie.

Veamos. Entre todas las posibles distancias que hay entre los chicos tiene que haber alguna que sea la menor (ya que son todas distintas). Esos dos niños se tienen que estar mirando entre sí (ya que no puede haber ningún otro niño más cerca).

Pero no sólo eso: no hay ninguno más mirándolos porque, si no, tendríamos el problema resuelto por lo que vimos más arriba.

Acá es donde interviene un típico argumento matemático: puedo retirar de mi análisis a estos dos niños ya que entre ellos no está el que estoy buscando (el que no es mirado por nadie). Hago de cuenta entonces que estos dos niños no están en el patio. Ahora me quedo con nueve (de los 11 iniciales), y repito el procedimiento.[79]

Entre estos nueve que quedaron hay dos que están separados por la menor distancia. Y, como en el caso anterior, los puedo reti-

79. Es decir, ahora es como si empezáramos el juego desde el principio, pero con nueve niños en lugar de once.

rar porque ninguno de los dos es el candidato que busco (niño no mirado por nadie). Ahora tengo siete. Y sigo con la misma idea. En algún momento, quedarán cinco, después tres… y, finalmente, uno solo. Justamente este último niño es el que estoy buscando. Él es quien no está siendo mirado por nadie. ¿Se entiende?

Moraleja 2: La solución de este problema utiliza herramientas típicas de la matemática que no son popularmente conocidas (pero deberían). Ir retirando los estudiantes de a dos (y argumentando las razones que permiten hacerlo) hasta llegar al final muestra el poder de este proceso.[80]

Moraleja 3: Haber evaluado el caso de 11 alumnos en lugar del caso general con un número *impar*, lo único que hizo es tomar un caso particular que sugiere lo que hay que hacer en el caso general. Lo único que importa es que sea un número impar de estudiantes, porque al ir retirando de a dos en algún momento el proceso va a terminar con un solo alumno que no es mirado por ningún compañero.

Conclusión: Es obvio que la matemática recreativa no es toda la matemática (ni mucho menos). Pero también es cierto que alguien que va a empezar en su vida aprendiendo cómo usar herramientas tan poderosas como las que se utilizan en este problema necesita que lo ayuden a disfrutar de lo que está haciendo. Y de eso se trata: aprender, estudiar o ir al colegio/escuela no puede ni debe estar emparentado con el sufrimiento (que obviamente produce rechazo).

---

80. Se conoce con el nombre de "razonamiento inductivo" o "recursivo", en este caso.

La idea es entrenarse para resolver problemas que presenta la vida cotidiana aprendiendo a usar la mayor cantidad de herramientas disponibles.

Por eso, aprender jugando no es una mala idea.

MISCELÁNEA

Números, estamos rodeados

¿Qué incidencia tienen los números en su vida? Sí, los números. ¿Qué relación tiene usted con ellos? ¿Cuánto le importan? ¿Cuánto los necesita? ¿Cuánto los usa?

Acá abajo, voy a escribir una lista (con varios números). En principio, no hay ninguna relación entre ellos, pero le pido lo siguiente: no los lea todos rápidamente. Léalos uno por uno y tómese un tiempo para pensar qué le significa cada uno (si es que le significan algo).

En todo caso, la/lo invito a que, cuando recorra la lista, vaya imaginando o preguntándose si los puede poner en algún contexto en el que cada uno tenga algún sentido para usted, si los puede asociar con algo. Después, más abajo, yo le cuento lo que me representan a mí. Acá va.

1492

3,1416

1976

365

1978 y 1986

9–11

29

1810
100
24
0
10
007
1
18
9
40.000.000
2012
30
1914-1918 y 1939-1945
36,7
90
1816
54
2
180
1789
13
360
11
60
1812
7.000.000.000
2001
666
25-5
9-7
14, 22 y 48
1984

Ahora, escribo algunas reflexiones mías sobre cada uno de ellos, pero la idea original sería que lo hiciera usted, y no yo.

1492 (año del descubrimiento de América)
3,1416 (aproximación al número pi)
1976 (comienzo del genocidio en la Argentina)
365 (días que tiene un año)
1978 y 1986 (Argentina campeón del mundo en fútbol)
9–11 (número asociado al ataque a las Torres Gemelas en Nueva York)
29 (días de los ñoquis)
1810 (año de la Revolución de Mayo)
100 (grados en los que hierve el agua; metros llanos)
24 (horas que tiene un día)
0 (la nada; la presencia de la ausencia; temperatura de congelamiento del agua)
10 (Maradona; la cantidad de mandamientos)
007 (James Bond)
1 (el número 1, ¿hace falta explicar algo más?)
18 (comienzo de la adultez)
40 (mazo de cartas españolas, “las cuarenta” en el tute)
9 (el “centroforward”, ¿o murió al amanecer?)
40.000.000 (de argentinos)
2012 (el año en el que este libro posiblemente saldrá impreso; el año que viene para mí, aunque en realidad serviría para cualquier año en el que usted esté leyendo este texto)
30 (días que tienen todos los meses, salvo febrero; además, días de pago... no para todos, claro)
1914-1918 y 1939-1945 (Primera y Segunda Guerra Mundial)
36,7 (de aquí en más, empieza la fiebre)
90 (los grados del ángulo recto)

1816 (año de la independencia argentina)
54 (código telefónico de la Argentina para llamar del exterior)
2 (¿cómo no poner al dos?)
180 (en grados, lo antipodal, lo opuesto)
1789 (Revolución Francesa)
13 (la yeta, martes o viernes, pero yeta al fin... para los que creen)
360 (grados, o lo que es lo mismo, una vuelta completa)
11 (un equipo de fútbol)
60 (minutos, segundos; la línea más popular de colectivos para los que viven en Buenos Aires)
1812 (obertura de Tchaicovsky... ¿muy sofisticado?)
110 (la guía)
7.000.000.000 (número aproximado de habitantes de la Tierra)
2001 (*Odisea del Espacio*)
666 (el diablo)
25-5 (25 de Mayo, Revolución de Mayo)
9-7 (9 de Julio, Independencia)
14, 22 y 48 (el borracho, los patitos y "il morto che parla", en la quiniela)
1984 (famosa novela de George Orwell)

Obviamente, la lista no es exhaustiva —ni mucho menos— pero pretende exhibir que tenemos una relación cotidiana y constante con una cantidad de números que nos significan cosas. No agregué (simplemente porque no los sé) los siguientes números que identifican a una persona aún más, y que para cada uno son distintos:

1) número del DNI
2) número de pasaporte
3) número de legajo (si trabaja en alguna gran empresa o repartición del Estado)
4) su domicilio postal
5) código postal
6) número de teléfono de su casa
7) número de su celular
8) las líneas de colectivo que le son familiares
9) aniversarios, cumpleaños y demás.

También estoy seguro de que todo el mundo sabe que las 4 y las 16 horas son lo mismo, igual que las 21 y las 9 horas. No se me escapa (igual que a usted) que si escribo las 7 en lugar de los 7, es porque ese número está ligado con "las 7 de la mañana" y el sonido de la alarma. La mayoría de los chicos lo conocen bien... y los adultos también.

Y estoy seguro de que cada uno de ustedes, mientras está leyendo esto, debe de estar pensando: ¿y cómo no incluyó tal o cual?

Los números nos tienen rodeados. Estamos impregnados de ellos. Los necesitamos para medir: el peso, el tiempo, la altura, la distancia, el colesterol, la temperatura, la superficie, el volumen, el sueldo, un precio, la humedad, la presión, el pulso, los resultados en cualquier deporte, los récords en esos mismos deportes, ¿quiere seguir usted?

No pretendo sacar ninguna conclusión. Sólo quiero describir. ¿No es increíble que los números formen un sistema tan poderoso que impregna e infiltra nuestras vidas como ninguna otra cosa? Para terminar, haga la siguiente prueba: escriba los números que figuran arriba y póngalos en inglés. Y después, sucesivamente en francés, portugués, italiano, alemán, danés, holandés,

noruego, incluso en chino. ¿Qué? ¿No sabe todos estos idiomas? No importa. El de los números es un lenguaje —casi[81]— universal. No necesita traducción.

81. Un dato muy interesante que me apuntó Carlos D'Andrea: curiosamente, el sánscrito, empleado por los iraníes, por ejemplo, usa otros caracteres para los números. Pero es casi el único, al menos entre los países que participan en la Olimpíada Internacional de Matemática.

¿Se puede construir una curva de longitud tan grande como uno quiera, pero que quepa en una hoja de papel?[82]

¿Qué sentido tendría esta pregunta si no existiera la restricción de poder dibujar una tal curva en una hoja de papel? Es decir, si se tratara solamente de dibujar o de encontrar una curva de longitud tan grande como uno quiera (eventualmente infinita), uno podría trazar una recta[83] o una semirrecta, y en ese caso ya tendría lo que quiere. Pero en cualquiera de esos dos casos tendríamos una curva que no entraría dentro del marco de una hoja de papel.

Lo que parece transformar el problema en algo imposible o difícil de concretar, es que el dibujo hay que poder hacerlo dentro de una superficie acotada. ¿Se podrá? Antes de leer la respuesta, como siempre la/lo invito a que lo piense por su cuenta. No hace falta que conteste en forma inmediata. Tómese su tiempo. Digo, tómese tiempo para pensar. Disfrute de que no le salga rápido, si es que eso sucede.

---

82. No está dicho explícitamente, pero sería bueno, si fuera posible, que la curva no se corte a sí misma.

83. ¿Pensó alguna vez que una recta es un caso particular de una curva? Es que una recta es una curva pero en donde la curvatura es constante. Pero esto no alcanza, porque un caso muy conocido de curva con curvatura constante es un círculo. Pero lo que sucede es que una recta es una curva de curvatura constantemente… ¡cero!

En todo caso, una ayuda. No siga leyendo si tiene ganas de reflexionar en soledad. Si no, le digo lo siguiente: se puede. Es decir, es posible encontrar curvas de longitudes tan grandes como uno se proponga. Más aún, uno puede encontrar un método para construirlas.

(La respuesta, en la página 303*)*

Si el infinito fuera un número

Supongamos que el infinito fuera un número. Lo voy a llamar S (para no llamarlo ∞).

Entonces

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots = S \quad (*)$$

Luego, si resto 1 de cada lado… queda:

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots \quad = S - 1$$

Pero en el término de la izquierda, puedo "sacar 2 como factor común".

$$2\,(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots) \quad = S - 1$$

Y lo que ahora queda entre paréntesis en el término de la izquierda es lo que originalmente —ver (*)— llamamos S. Luego, resulta:

$$2S = S - 1$$

Pero entonces, si $2S = S - 1$, entonces, resto S de cada lado y se tiene el siguiente —increíble— resultado:

$$2S - S = -1$$

O sea,

$$S = -1$$

Por lo tanto, si uno supusiera que el infinito fuera un número, y uno utilizara las operaciones habituales de la aritmética, llegaría a la conclusión de que S, ¡tiene que ser un número negativo! Y nada menos que (–1).

Por lo tanto, infinito **¡no es un número!**

Muy bonito, ¿no?

Cuidado con el infinito

Acompáñeme en este razonamiento. Supongamos que voy a sumar alternadamente infinitos números uno y números menos uno. Más aún: voy a suponer que el resultado de hacer esa suma es un número que voy a llamar A.

Es decir, si quiero hacer:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = A$$

Luego, fíjese que puedo REESCRIBIR este número A, así:

$$A = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = 1 - A$$

(ya que el término que está entre paréntesis… es justamente A).

Luego, resulta la igualdad:

$$A = 1 - A$$

Y por lo tanto, se tiene:

$$2A = 1$$

O lo que es lo mismo:

$$A = 1/2$$

Como usted advierte, esto es imposible: ¿Cómo va a resultar 1/2 una suma de números enteros?

Esto exhibe bien claramente que las reglas que uno puede usar para operar aritméticamente (sumar, restar) con conjuntos finitos de números ya no son más válidas cuando uno opera con conjuntos infinitos de números.

Sin embargo, en otros casos, esas reglas sí se pueden usar y el resultado que se obtiene es el correcto. Fíjese:

En el episodio 1 de *Matemática… ¿estás ahí?* (páginas 90 y 91) demostré que

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots = 2$$

Pero quiero usar ahora las mismas reglas que utilicé arriba y que no funcionaron para calcular la suma. Quiero averiguar qué pasaría ahora si las uso otra vez. Es decir:

Si llamo

$$A = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots$$

Entonces, multiplicando por 2, se tiene

$$2A = 2 + 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots$$

O sea,

$$2A = 2 + A$$

Luego, si resto A de los dos lados de la igualdad, se tiene:

$$A = 2$$

Y este resultado sabemos que es cierto.

Moraleja: Cuando uno trabaja con conjuntos infinitos de números, las reglas con las que uno está acostumbrado a operar algunas veces funcionan y otras no. La matemática se ocupa (en estos casos) de buscar condiciones que sirvan para poder determinar de antemano si se puede o no se puede usar las reglas convencionales.

Para aquellos interesados,[84] cuando una serie es absolutamente convergente, se pueden conmutar los términos de cualquier forma, y eso no altera la convergencia. Es decir, si converge de una forma, converge con cualquier otro reordenamiento de términos. Y si diverge de una forma, diverge con cualquier otro ordenamiento también. Y son los únicos casos en los que se pueden usar las reglas de la suma para conjuntos finitos. Es decir, si no es absolutamente convergente, entonces el resultado es falso. Esas reglas no se pueden usar. Por eso, en el caso de la primera serie (1 – 1 + 1 – 1 + 1…), como no es absolutamente convergente, usar lo que sabemos para conjuntos finitos en este caso, termina en un disparate. En el segundo caso, en el de la suma de la serie geométrica de razón 1/2, el reordenamiento no altera la suma, y por eso uno concluye —correctamente— que el resultado es 2.

84. Escribo “interesados” y pienso en aquellos que han leído sobre series numéricas, uno de los temas más útiles y fascinantes de la matemática.

Más sobre la serie armónica (o El regreso de la serie armónica)

En la página 83 del episodio 2 de *Matemática… ¿estás ahí?*, escribí sobre la divergencia de la serie armónica.

Ahora, algunos datos más, que son más fáciles de obtener a medida que las computadoras son cada vez más rápidas.

a) Como se sabe que la serie armónica diverge, entonces tiene sentido preguntarse: ¿cuántos términos hay que sumar para que la suma supere al número 5? Esta respuesta es —relativamente— fácil. Hacen falta (inténtelo usted para convencerse) sumar más de 100 términos:

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + \dots$$

Y así siguiendo. Cuando uno pasa los 100 términos (o sea, llega hasta el término 1/100) la suma es más grande que cinco.

b) ¿Y para superar al número 100? En este caso, la respuesta es muchísimo más complicada y hacen falta muchas horas de trabajo de computadora para determinar cuántos términos hace falta sumar. Para que usted no lo intente, quiero ayudar con este dato (casi descorazonador). Hacen falta sumar más de

15.092.688.622.113.788.323.693.563.264.538.101.449.859.497

términos para recién entonces atravesar la valla del 100.

Es decir, es un número muy grande (aproximadamente 1,509 x 10^{53}).[85]

Más aún, esto demuestra la lentitud con la que diverge la serie armónica. Diverge, sí, pero muy muy despacio.

c) Otro apunte breve con respecto a la serie armónica. Aceptamos que empiece con el número 1. Es decir, la serie armónica es:

1 + (1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + …

Para superar al número 1, hace falta un término (además del 1 claro está).

Para superar al número 2, hacen falta 4 términos.

Para superar al número 3, hacen falta 11 términos.

Para superar al número 4, hacen falta 31 términos.

Y sigo: hacen falta 83, 227, 616, 1.674, 4.550, 12.367, 33.617, 91.380, 248.397… para superar los números 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 y 13, respectivamente.

---

85. Estos datos pueden ser verificados (y de allí los saqué yo) en http://www.research.att.com/~njas/sequences/A004080 y también en http://mathworld.wolfram.com/HarmonicSeries.html. La primera referencia corresponde al increíble trabajo de Neil J. A. Sloane, que compendia las sucesiones de números enteros más conocidas. Hasta el 10 de mayo de 2010 hay publicadas en forma gratuita más de 175.000 sucesiones (http://www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html). La segunda corresponde a la página web del notable físico y matemático inglés Stephen Wolfram, quien es el autor del programa Mathematica y del buscador de Internet de segunda generación, Wolphram Alpha.

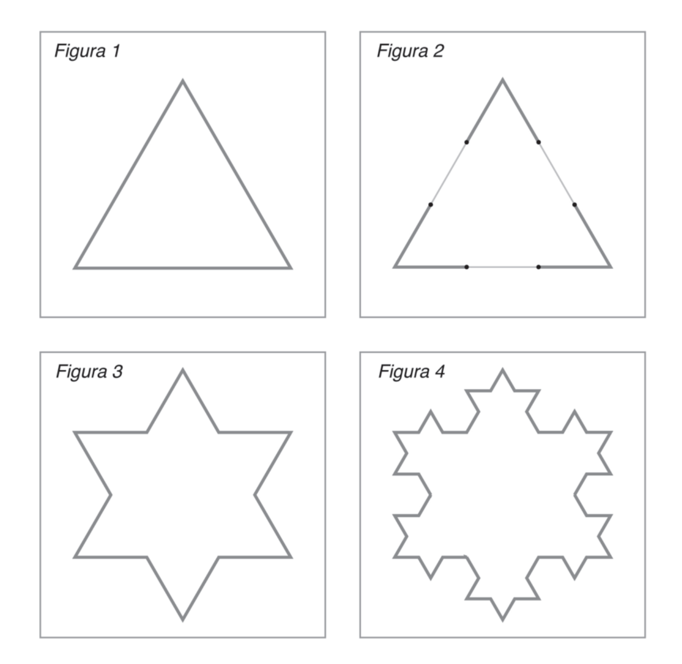
d) Si uno excluyera todos los términos de la serie armónica que contienen el número 9 como dígito, ¿qué pasaría?, ¿seguirá divergiendo? Curiosamente, la respuesta es bien antiintuitiva. Si uno quita los sumandos que incluyen a un número 9, entonces la serie ahora se transforma en convergente y no llega a sumar 23. ¿Cómo se explica esto? Es que si bien entre los primeros 10 números estoy excluyendo nada más que uno (el número 9; o, en realidad, 1/9 para ser más precisos), entre los primeros 100 números, estoy quitando 19. Y entre los primeros 1.000, excluyo 271.

   Si uno siguiera avanzando y se fijara en números de más de 100 (cien) dígitos, aunque no lo parezca, la amplia mayoría de ellos contiene un número 9 y, por lo tanto, se quedan fuera. Tantos se quedan fuera, que los que quedan hacen que la serie ahora converja.
e) Por último, no sólo sucede si uno excluye los números que contienen al número 9. Es posible demostrar (y no es muy difícil) que si uno saca todos los términos que contengan el número 732 (por ejemplo), también hace converger la serie. Una vez más, aunque parezca muy antiintuitivo, cualquier número que uno elija termina apareciendo muchas veces cuando uno tiene números grandes (de 100 dígitos y más).

Solución a "¿Se puede construir una curva de longitud...?"[86]

La respuesta es que sí, se puede. El asunto ahora es construirla. Y la/lo invito a que lo hagamos juntos.

Vamos a comenzar dibujando algunas curvas y les vamos a calcular la longitud a cada una de ellas. Y usted advertirá de inmediato cómo es posible ir construyendo curvas de longitudes cada vez más grandes, sin salirnos del marco que provee una hoja de papel.



86. En http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Calculus/NoLimit.shtml y en http://en.wikipedia.org/wiki/Koch_snowflake se puede encontrar el dibujo del triángulo original y de las sucesivas curvas que uno va generando, cada vez con más segmentos que las componen, y con longitud tendiendo a infinito.

Empiezo con un triángulo equilátero (o sea, un triángulo de tres lados iguales). Cada lado tiene longitud 1. Por lo tanto (si nos quedamos con el perímetro de ese triángulo, el contorno, como primera curva), esta curva tiene longitud 3 (la suma de los tres segmentos que lo componen), como se ve en la Figura 1.

Ahora, para conseguir la segunda curva, voy a modificar cada segmento del triángulo original. Marco ahora dos puntos en cada uno de los segmentos (que tienen longitud 1). Como se ve en la Figura 2, las dos marcas están hechas de manera tal de dividir ese segmento en tres segmentos iguales. Por lo tanto, cada segmento *nuevo* tiene ahora longitud 1/3.

Ahora, dejamos como están los dos segmentos de las puntas mientras fabricamos una especie de carpa por encima del segmento del medio, formando con éste un triángulo equilátero de lado 1/3, en la Figura 3.

Como hago esto con cada uno de los lados del triángulo original, ahora cada segmento de longitud 1 queda reemplazado por cuatro segmentos de longitud 1/3 cada uno. La longitud de esta nueva "curvita" (la suma de estos cuatro segmentos) es ahora 4/3.

Como en el triángulo original había tres segmentos de longitud 1, y reemplacé cada uno por una nueva curva que ahora mide 4/3, en total, la nueva curva mide

$$3 \text{ x } (4/3) = 4$$

Entonces, ahora tenemos dos curvas. La primera mide 3 unidades. La segunda mide 4 (ver Figura 4).

Por otro lado, quiero *contar* el número de segmentos que hay en cada curva. En la primera curva (que era un triángulo) hay 3 segmentos. En la segunda, cada segmento del triángulo original

dio lugar a cuatro segmentitos (cada uno de longitud 1/3). Por lo tanto, ahora hay

$$3 \times 4 = 12 \text{ segmentos}$$

Ahora, a partir de la segunda curva, construimos una tercera. El procedimiento es una réplica del que usé recién para fabricar la segunda a partir de la primera.

Divido cada segmento de la segunda curva en tres porciones iguales (en este caso, cada una mide 1/9) y fabrico, como antes, una nueva curva formada por cuatro segmentos en donde los dos segmentos del medio forman, otra vez, una suerte de carpa por encima del segmento del medio. Como cada segmento mide ahora 1/9, y en total hay 4 de ellos, se tiene que cada una de esas nuevas curvitas mide ahora

$$4 \times 1/9 = 4 \times (1/3^2)$$

Como, además, sabemos que hay 12 segmentos, ahora en total la curva número 3 mide:

$$12 \times (4/3^2)$$

¿Y cuántos segmentos tiene esta nueva curva? Como había 12 en la curva 2, y cada segmento queda dividido en 4 partes, ahora, la curva 3 tiene:

$$12 \times 4 = 48 \text{ segmentos} = 3 \times 4^2 \text{ segmentos}$$

Voy a dar un paso más. Usando la misma técnica que usé para crear las curvas 2 y 3 a partir del triángulo original, ahora

fabricamos una cuarta curva. Cada segmento de la curva 3 mide $1/9 = 1/3^2$.

Como lo voy a dividir en 3, cada segmento ahora va a medir

$$1/27 = 1/3^3$$

Cada segmento de la curva tres se amplía a cuatro en la cuarta curva, por lo que ahora esta nueva curva mide:

$$48 \times 4/27 = 3 \times 4^2 \times 4/3^3 = 3 \times (4/3)^3$$

Para calcular el número de segmentos, lo que hay que hacer es multiplicar por 4 cada segmento que había en la curva 3. Como había 48 segmentos (o sea, 3 x 42 segmentos), ahora hay

$$3 \times 4^3 \text{ segmentos} = 192 \text{ segmentos}$$

Moraleja (y resumen):

Número de curva	**Número de segmentos**	**Medida**
1	3	3
2	$4 \times 3 = 12$	$3 \times 4/3$
3	$4^2 \times 3 = 48$	$3 \times (4/3)^2$
4	$4^3 \times 3 = 192$	$3 \times (4/3)^3$
5	$4^4 \times 3 = 768$	$3 \times (4/3)^4$
6		
7		
…		
n	$4^n \times 3$	$3 \times (4/3)^n$

Entonces, si uno reitera este proceso indefinidamente, va obteniendo curvas que se componen cada vez de más segmentos (en el paso enésimo hay (4^n x 3) segmentos en total), pero lo interesante es que la longitud de cada curva es cada vez mayor. Y esto sucede porque el número $(4/3)^n$ es cada vez más grande a medida que aumenta el número *n*.

De hecho, como el número $(4/3)^n$ tiende a infinito (o sea, si usted me da un número positivo cualquiera, digamos 100 por poner un ejemplo, yo puedo encontrar un número natural *n* de manera que $(4/3)^n$ es mayor que 100).

Justamente, si n = 17, entonces

$$(4/3)^{17} = \text{(aprox.) } 133{,}03 > 100$$

Y si usted me pidiera que encontrara un número *n* de manera tal que $(4/3)^n > 1.000$ también lo voy a encontrar. En este caso, si n = 25 entonces

$$(4/3)^{25} = 1.328,\ 82 > 1.000$$

De esta forma, uno se convence de que las longitudes de estas curvas tienden a infinito; o sea, se hacen tan grandes como uno quiera, pero al mismo tiempo todas estas curvas están encerradas en una hoja de papel, y están metidas dentro de una región acotada alrededor del triángulo original.[87]

87. Un paso más, un poco más sofisticado: si uno hiciera tender el número *n* a infinito, la curva límite también existe y se llama el "copo de nieve de Koch", curva que no tiene una longitud finita, pero que está encerrada en la misma hoja de papel original.

Índice